MỤC LỤC

Trang

CÁC KÝ HIỆU ĐÃ SỬ DỤNG

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Biến dạng dài theo các phương *x, y* và z
κ_x, κ_y	Độ cong của tấm theo phương trục *x* và trục y.
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Ứng suất cắt trên các mặt có véctơ pháp tuyến là *x, y* và *z* và có chiều trùng với phương y, *z* và x
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Ứng suất pháp tuyến theo trục *x, y* và z
S_x, S_y, S_{xy}	
γ	Biến dạng trượt của tấm
ν	Hệ số Poisson của vật liệu làm tấm
κ	Độ cong của tấm
τ	Ứng suất cắt
Π	Thế năng
κ_{xy}	Độ xoắn của tấm
A	Công ngoại lực
a, b	Chiều dài các cạnh theo phương *x, y* của tấm
d	Độ cứng uốn của tấm
E	Mô đun đàn hồi
F	Diện tích tiết diện
G	Môđun đàn hồi trượt
h	Bề dày tấm
M	Mômen trên mỗi đơn vị chiều dài, mômen tổng
M_x , M_y	Mômen uốn trên mỗi đơn vị chiều dài theo trục *x, y* trong mặt phẳng Oxy
M_{xy}	Mômen xoắn trên mỗi đơn vị chiều dài trong mặt phẳng Oxz
N_{xy}	Lực trượt trên mỗi đơn vị chiều dài trên mặt phẳng *x* và có chiều trùng với trục y
P	Lực tập trung
$p(x,y)$	Tải trọng mặt tác dụng lên mặt phẳng Oxy
p_{mn}	Hệ số chuỗi tải trọng
Q_x , Q_y	Lực cắt trên mỗi đơn vị chiều dài trên mặt phẳng Oxy
r_x, r_y	Các bán kính cong của tấm trong mặt phẳng Oxz và Oyz
U	Năng lượng biến dạng
u, v	Chuyển vị của tấm theo phương *x,* y
w	Độ võng của tấm theo phương z
x, y, z	Tên hệ trục tọa độ

1. TẤM CHỊU UỐN:

1.1. Các khái niệm và giả thiết:

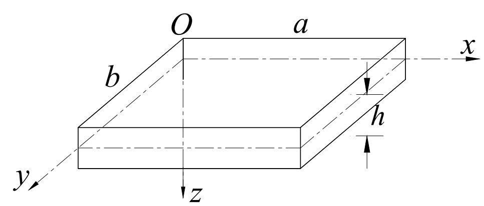
1.1.1. Khái niệm tấm:

- Tấm là vật thể lăng trụ hoặc hình trụ có chiều cao *h* nhỏ hơn rất nhiều so với kích thước của 2 phương còn lại.

Mặt phẳng cách đều 2 mặt bên trên và dưới của tấm được gọi là mặt trung bình của tấm. Khi chịu uốn mặt trung bình của tấm bị cong đi.

Giao tuyến của mặt trung bình và các mặt biên cạnh tấm được gọi là cạnh biên của tấm (hay chu vi tấm).

Để tiện nghiên cứu và khảo sát: thường chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, thường mặt phẳng Oxy nằm trong mặt trung bình tấm. Trục z hướng xuống, vị trí của gốc tọa độ O sẽ được chọn tùy thuộc vào hình dạng chu vi tấm và các đặc trưng liên kết của biên tấm sao cho cho phù hợp trong các bài toán cụ thể.



h: chiếu dày tấm

- Tấm được sử dụng rộng rãi trong xây dựng: các tấm sàn, panel, tấm lợp nhà công nghiệp, ...
- Phần lớn tấm dùng trong xây dựng tấm mỏng (tấm theo giả thiết Kirchhoff).

+ Tấm được gọi là tấm mỏng nếu: $\frac{1}{80} \le \frac{h}{b} \le \frac{1}{5}$ (trong đó: *b* là kích thước nhỏ nhất của mặt trung bình) và độ võng $w_{\max} \le \frac{h}{4}$ (cũng có thể sử dụng lý thuyết tấm mỏng với $\frac{h}{b} = \frac{1}{3}$)

+ Trường hợp tấm có $\frac{h}{b} > \frac{1}{5}$ (hoặc $> \frac{1}{3}$) thì ta có tấm dày.

+ Nếu tấm có độ võng $w_{\max} > \frac{h}{4}$ thì cần tính theo lý thuyết tấm có độ võng lớn hay tấm mềm (hay lý thuyết màng).

1.1.2. Các giả thiết khi tính toán tấm:

Tấm mỏng được tính toán ứng dụng theo lý thuyết tấm chịu uốn sau đây và dựa trên các giả thiết sau (còn được gọi là giả thiết Kirchhoff).

1) <u>Giả thiết về các đoạn thẳng pháp tuyến</u>: các đoạn thẳng vuông góc với mặt trung bình của tấm sẽ còn thẳng và vuông góc với mặt trung bình khi chịu uốn và độ dài của chúng là không đổi.

+ Từ giả thiết này dễ thấy rằng các góc vuông tạo bởi các phần tử thẳng vuông góc với mặt trung bình (và có phương dọc trục *z*) với các trục *x, y* vẫn còn là góc vuông trong quá trình biến dạng, như vậy không có sự trượt trong các mặt phẳng đó.

Hay: $$\begin{cases} \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

+ Vì độ dài của các đoạn thẳng vuông góc này không thay đổi nên dễ thấy rằng biến dạng dài theo phương *z* là bằng 0.

Hay: $$\varepsilon_z = 0 \quad (1.2)$$

2) <u>Giả thiết về mặt trung bình</u>: tại mặt trung bình tấm không hề có biến dạng kéo, nén hay trượt. Khi bị uốn mặt trung bình là mặt trung hòa. Từ đó dễ thấy trên mặt trung bình, các chuyển vị:

$$u_0 = v_0 = 0 \qquad \text{hay} \qquad \left(u\big|_{z=0}\right) = \left(v\big|_{z=0}\right) = 0 \tag{1.3}$$

3) <u>Giả thiết về sự tương tác giữa các lớp của tấm</u>: sự tương tác giữa các lớp song song với mặt trung bình có thể bỏ qua. Tức là ứng suất pháp σ_z có thể bỏ qua (vì là nhỏ so với σ_x và σ_y)

1.2. Chuyển vị và biến dạng trong tấm (Kinematical Relationships):

Chúng ta sẽ nghiên cứu tấm chịu tải trọng ngang, tức tải trọng vuông góc với mặt trung bình của tấm. Để xác định biến dạng và chuyển vị ta sẽ dựa vào các giả thiết ở 1.1.2:

- Theo giả thiết ①, vì $\varepsilon_z = 0$ nên theo công thức Cauchy: $\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow$ độ võng w

của tấm không phụ thuộc vào z hay: $w = w(x, y)$. Điều này có nghĩa là tất cả các điểm nằm trên cùng đoạn thẳng vuông góc mặt trung bình tấm sẽ có cùng độ võng.

- Cũng từ giả thiết ①, từ điều kiện về biến dạng trượt $\begin{cases}\gamma_{yz} = 0\\ \gamma_{xz} = 0\end{cases}$, sử dụng công thức

Cauchy:

$$\begin{cases}\gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0\\[2mm] \gamma_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0\end{cases} \quad \text{ta được:} \quad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{\partial w}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{\partial w}{\partial y}\end{cases}$$

Bằng cách tích phân, biểu thức vừa nhận được theo z, ta có:

$$\begin{cases}u = -z\dfrac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y)\\[2mm] v = -z\dfrac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y)\end{cases} \tag{a}$$

Các hàm $f_1(x, y)$ và $f_2(x, y)$ được xác định bằng cách sử dụng giả thiết ② về tính không biến dạng kéo, nén của mặt trung bình.

Theo giả thiết này các chuyển vị u_0 và v_0 của các điểm trên mặt trung bình là bằng 0 nên: $\begin{cases}u_0 = u\,|_{z=0} = f_1(x, y) = 0\\ v_0 = v\,|_{z=0} = f_2(x, y) = 0\end{cases}$

Vậy tóm lại, theo (a) ta có: $$\begin{cases}u = -z\dfrac{\partial w}{\partial x}\\[2mm] v = -z\dfrac{\partial w}{\partial y}\end{cases} \tag{1.4}$$

Điều này có nghĩa là các chuyển vị thành phần của tấm đều biểu diễn được qua hàm độ võng w của mặt trung bình.

- Các thành phần biến dạng khác được tìm thấy bằng cách sử dụng công thức Cauchy:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -2x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{1.5}$$

➢ Như vậy là cũng như là các chuyển vị thành phần, các thành phần biến dạng cũng được biểu diễn qua hàm độ võng *w*.

1.3. Ứng suất và nội lực trong tấm (Material law):

- Để tìm ứng suất, ta sử dụng công thức định luật Hooke (dạng ngược) với chú ý rằng $\sigma_z = 0$. Dễ dàng có được bằng cách sử dụng (1.5):

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) = -\dfrac{E}{1-\nu^2} z\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) = -\dfrac{E}{1-\nu^2} z\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = -\dfrac{E}{1+\nu} z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{1.6}$$

- Với τ_{yz} và τ_{zx}, nếu theo định luật Hooke và công thức (1.1) thì sẽ bằng 0. Tuy nhiên điều này mâu thuẫn với điều kiện cân bằng và thực ra thì τ_{yz} và τ_{zx} là khác 0. Để tìm chúng, ta sử dụng điều kiện cân bằng: $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \; (i = 1,2,3)$

Từ phương trình vi phân cân bằng thứ nhất, bỏ qua lực khối, ta thấy: $\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$

Thay σ_x và τ_{xy} trong (1.6) và ta có:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{E}{1-\nu^2} z\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) + \frac{E}{1+\nu} z\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{E}{1-\nu^2} z\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

Tích phân theo biến *z,* ta có:

$$\tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + f_1(x,y)$$

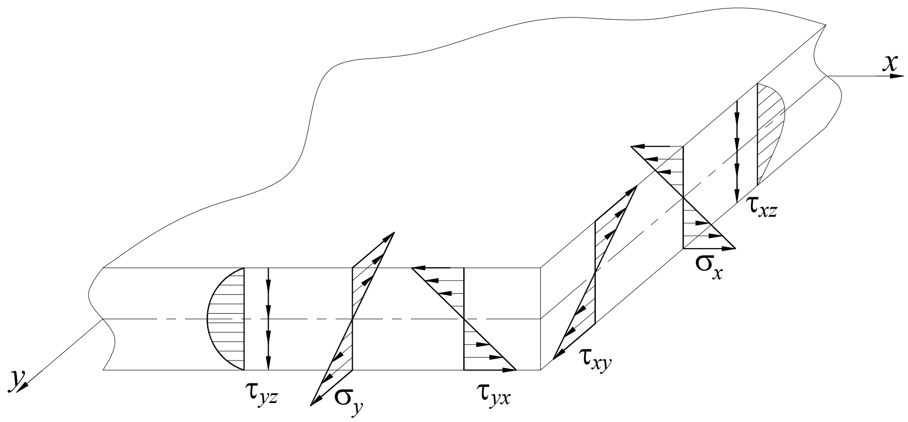
Hàm $f_1(x,y)$ được xác định từ điều kiện mặt trên và mặt dưới tấm không có ứng suất tiếp (vì không có tải song song bề mặt tấm), tức là:

$$\tau_{xz}\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{Eh^2}{8\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + f_1(x,y) = 0$$

Suy ra: $f_1(x,y) = -\dfrac{Eh^2}{8\left(1-\nu^2\right)}\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$

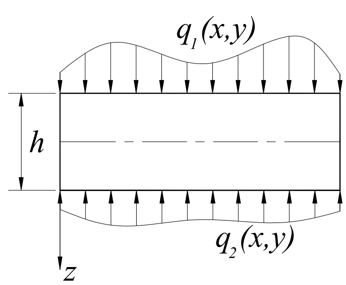
$$\left.\begin{aligned}&\text{Vậy} && \tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \\ &\text{Tương tự với } \tau_{yz}: && \tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

- Sự phân bố theo bề dày *h* của các thành phần ứng suất vừa tìm có thể thấy qua hình vẽ bên:



- Cũng bằng cách khảo sát phương trình vi phân cân bằng thứ 3, dựa vào các điều kiện biên trên và dưới của tấm, người ta viết được biểu thức tính σ_z và thấy rõ rằng σ_z có cùng bậc với cường độ tài trọng phân bố mặt trên và dưới và là không đáng kể so với σ_x và σ_y

Cụ thể:



$$\sigma_z = \frac{q_2 - q_1}{2} + \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3}\right)\nabla^4 w$$

- Cũng tương tự trong sức bền, hợp lực của các ứng suất phân bố theo bề dày tấm trên 1 đơn vị dài được gọi là các thành phần ứng lực (nội lực) của tấm hay thường gọi là nội lực tấm:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x .1.dz = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0 \qquad (\mathrm{dF} = 1.\mathrm{dx})$$

Tương tự ta cũng có: $N_y = 0$

Gọi M_x là mômen uốn trên 1 đơn vị dài mặt cắt có pháp tuyến là trục *x*:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x .z.dF = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

trong đó: $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ (1.8)

được gọi là độ cứng trụ của vì nó là đặc trưng về vật liệu và hình học của tấm chịu uốn.

Cũng trên mặt cắt có pháp tuyến x còn có lực cắt Q_x:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dF = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).1.dz = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w$$

Lực trượt (lực tiếp) N_{xy} (là tổng hình chiếu lên phương y của các ứng suất τ_{xy})

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dF = -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0$$

Mômen xoắn M_{xy} (do τ_{xy}) trên mặt cắt này:

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dF = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

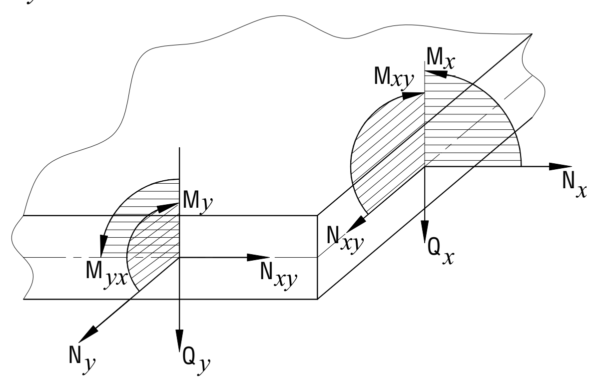
- Tương tự, trên mặt cắt có pháp tuyến là trục y, ta có các thành phần nội lực phân bố trên 1 đơn vị dài:

Mômen uốn: $M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$

Lực cắt: $Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w$

Mômen xoắn: $M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = M_{xy}$

- Vậy ta đã tìm được các thành phần nội lực của tấm khi chịu lực ngang. Hình vẽ bên biểu diễn các giá trị dương của nội lực thành phần.



- Ngoài ra, như đã biết: khi biến dạng và chuyển vị là nhỏ có thể xem đạo hàm bậc hai của hàm độ võng w là các độ cong của mặt võng.

Với hệ trục như hình vẽ thì:

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{r_x} = \kappa_x \qquad \text{và} \qquad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r_y} = \kappa_y$$

và độ xoắn: $-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r_{xy}} = \kappa_{xy}$

Từ đó, các mômen có thể được biểu diễn qua các độ cong như sau:

$$\begin{cases} M_x = D\left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) = D(\kappa_x + \nu \kappa_y) \\ M_y = D\left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) = D(\kappa_y + \nu \kappa_x) \\ M_{xy} = D(1-\nu) \frac{1}{r_{xy}} = D(1-\nu) \kappa_{xy} \end{cases}$$

Hay ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1/r_x \\ 1/r_y \\ 1/r_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12}{Eh^3}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

Các phương trình trên là các phương trình vật lý của tấm. Nó cho biết mối liên hệ giữa nội lực và biến dạng của mặt trung bình.

<u>Tóm lại</u>: Từ các phương trình biến dạng (kinematical) và các phương trình ứng xử vật liệu (định luật Hooke) ta có các phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa nội lực và biến dạng mặt trung bình như sau:

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{yx} = M_{xy} = -D(1-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x = -D\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \\ Q_y = -D\dfrac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \end{cases} \tag{1.9}$$

Kết hợp (1.6) và (1.7) ta có các biểu thức tính ứng suất qua nội lực:

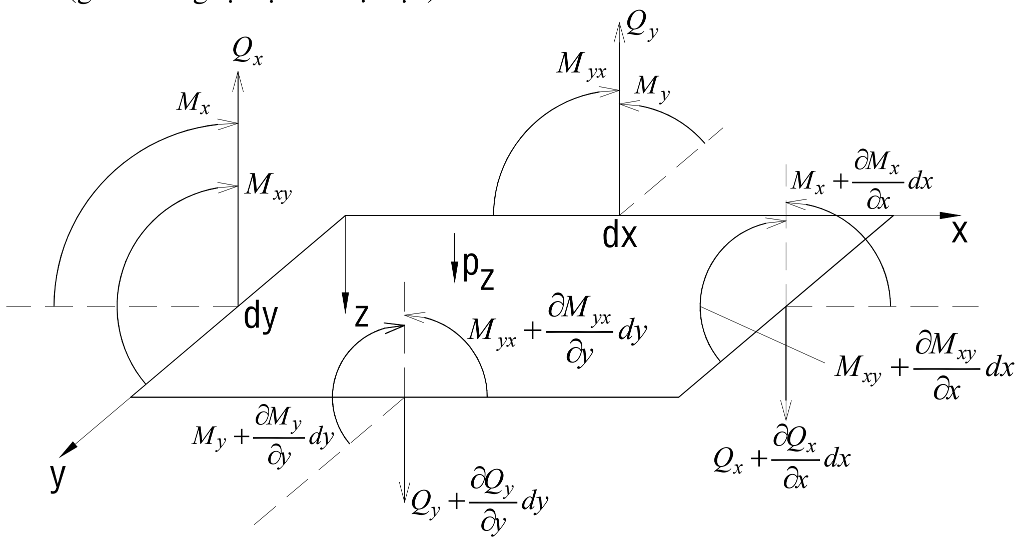
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{M_x}{h^3/12} z = \dfrac{M_x}{I} z \\ \sigma_y = \dfrac{M_y}{h^3/12} z = \dfrac{M_y}{I} z \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} = \dfrac{M_{xy}}{h^3/12} z = \dfrac{M_{xy}}{I} z \\ \tau_{xz} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q_x}{h}\left[1 - 4\left(\dfrac{z}{h}\right)^2\right] \\ \tau_{yz} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q_y}{h}\left[1 - 4\left(\dfrac{z}{h}\right)^2\right] \\ \sigma_z \approx 0 \end{cases}$$

Cũng có thể thấy rằng, tương tự trong dầm chịu uốn, ứng suất tiếp τ_{xz}, τ_{yz} biến thiên theo luật bậc hai và là nhỏ so với ứng suất τ_{xy}. Ngoài ra, ứng suất đạt giá trị lớn nhất tại mặt trung bình:

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_x}{h}; \qquad (\tau_{yz})_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{h}$$

1.4. Phương trình vi phân chủ đạo của tấm chịu uốn:

- Ở trên ta đã thấy rằng: tất cả các thành phần ứng suất hay nội lực, biến dạng của tấm đều được biểu diễn qua hàm độ võng *w(x,y)* của mặt trung bình. Do vậy trước hết và đầu tiên là cần tìm được hàm độ võng *w(x,y)*.
- Khảo sát sự cân bằng của 1 phân tố mặt trung bình có kích thước: *dxdy*. Đặt các lực lên phân tố (gồm cả ngoại lực và nội lực) như hình vẽ:



\+ Từ phương trình cân bằng (chiếu lên phương trục z). Ta có:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}dxdy+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dxdy+p_z dxdy=0$$

Hay: $$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+p_z=0 \quad \text{(a)}$$

\+ Từ phương trình mômen với trục *y,* bỏ qua các đại lượng vô cùng bé bậc cao, ta có

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}dxdy+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}dxdy-Q_x dxdy=0$$

Hay: $$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}=Q_x \quad \text{(b)}$$

\+ Từ phương trình mômen với trục *x,* tương tự ta có:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=Q_y \quad \text{(c)}$$

Thay (b) , (c) vào (a); loại bỏ lực cắt ta nhận được:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-p_z$$

Thay các biểu thức tính M_x, M_{xy}, M_y theo hàm độ võng *w(x,y)* từ (1.9) vào ta có:

$$-D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\nu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+2(1-\nu)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\nu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right]=-p_z$$

Hay: $$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]=p_z$$

Hay: $D\nabla^4 w=p_z$

Hay $$\boxed{\nabla^4 w=\frac{p_z}{D}} \quad (1.10)$$

➢ Phương trình (1.10) là phương trình vi phân của mặt trung bình khi võng. Nó còn được gọi là phương trình vi phân tấm chịu uốn (Phương trình Cofy German).

Phương trình (1.10) có dạng vi phân cấp 4. Nó là phương trình vi phân chủ đạo của bài toán tấm mỏng chịu uốn và biểu diễn theo hàm độ võng w của mặt trung bình.

• Đôi lúc phương trình vi phân này được biểu diễn ở dạng vi phân cấp 2 bằng cách đưa ra hàm mômen M (moment function) hay còn gọi là hàm mômen tổng (moment sum):

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\nabla^2 w$$

Khi đó các lực cắt sẽ là:

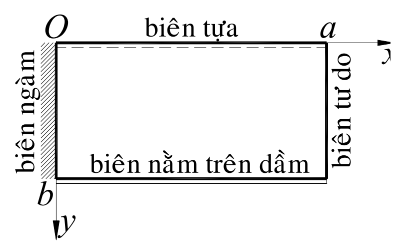
$$Q_x = \frac{\partial M}{\partial x} \qquad \text{và} \qquad Q_y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Và cuối cùng dễ dàng nhận thấy rằng phương trình vi phân cấp 4 được thay thế bằng 2 phương trình vi phân cấp 2:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 M &= \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p_z \\ \nabla^2 w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \end{aligned}} \tag{1.11}$$

1.5. Các điều kiện biên trên chu vi tấm:

Tùy thuộc vào điều kiện liên kết ở mép tấm mà trong thực tế ta thường gặp các điều kiện biên sau:



1) ***Cạnh biên ngàm***: (fixed or clamped or built in edge) ($x=0$): khi đó liên kết ngăn cản mọi chuyển dịch thẳng và xoay trong mặt phẳng xz, tức là:

$$\text{Tại } x = 0 \text{ cần có: } \begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

2) ***Biên tựa cố định***: (simple support, hinge pinted) ($y=0$): Trên cạnh này sẽ không có chuyển vị đứng và mômen uốn M_y .

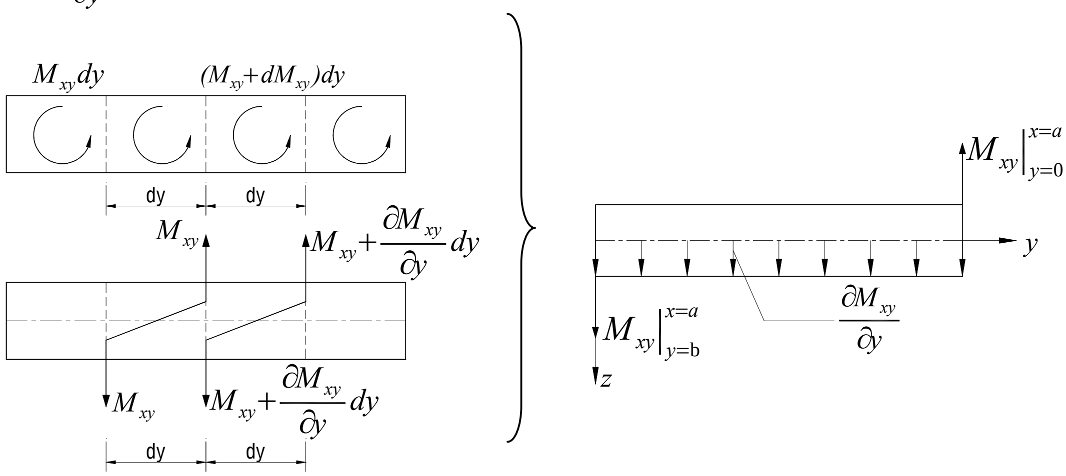
$$\text{Hay tại } y = 0 \text{ có: } \begin{cases} w = 0 \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\text{Hay tại } y = 0 \text{ có: } \begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \tag{1.14a}$$

$$\text{Hay độ cong bằng không, (tại } y = 0\text{) có: } \begin{cases} w = 0 \\ \kappa_y = \dfrac{1}{r_y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \tag{1.14b}$$

3) ***Biên tự do***: (cạnh x = a): Rõ ràng trên cạnh biên tự do, các mômen uốn, lực cắt, mômen xoắn (M_x, Q_x, M_{xy}) cần là bằng 0. Tuy nhiên vì phương trình vi phân đạo hàm riêng của bài toán là cấp 4 nên trên mỗi cạnh chỉ có 2 điều kiện biên cần có. Do đó cần tìm những điều kiện biên phù hợp và thống nhất với 3 điều kiện nêu trên. Điều này làm được nếu các yêu cầu về mômen xoắn và lực cắt trên biên là bằng 0 được thay thế bởi một điều kiện tương đương như dưới đây.

Qua hình vẽ, ta thay mômen xoắn M_{xy} phân bố trên đoạn dy bằng cặp lực ngược chiều $\frac{M_{xy}dy}{dy}$ với cách tay đòn dy, và trên các đoạn thẳng có chiều dài dy khác cũng tương tự và do đó, từ hình vẽ dễ thấy rằng trên cạnh $x=a$, có lực phân bố thẳng đứng tác dụng với cường độ bằng $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$:



Còn lại các điểm đầu và điểm cuối của biên có các lực tập trung có giá trị M_{xy} (a,0) và M_{xy} (a,b).

Và như vậy ta xem rằng trên cạnh x=a có lực cắt Q_x và lực phân bố $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ cùng tác dụng và hợp lực của chúng gọi là lực quy đổi Kirchhoff.

$$Q_x^{qđ} = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Sử dụng các công thức tính nội lực đã có, ta nhận được:

$$\begin{cases} Q_x^{qđ} = Q_x + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \\ Q_y^{qđ} = Q_y + \dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -D\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] \end{cases} \qquad (1.15)$$

Và do đó điều kiện biên trên cạnh tự do x=a là:

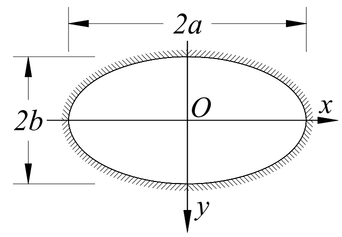
$$\begin{cases} M_x = 0 \\ Q_x^{qđ} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{cases} \qquad (1.16)$$

Việc thay tương đương mômen xoắn và lực cắt bằng lực quy đổi tương đương tĩnh theo nguyên lý Saint Venant chỉ ảnh hưởng đến ứng suất cục bộ.

4) ***Cạnh biên nằm trên dầm***: (y = b) khi đó phải xem như cạnh nằm trên gối đàn hồi và ngàm đàn hồi. Lúc đó, các lực quy đổi Kirchhoff (Q_y^{qd}) và các mômen uốn (M_y) xuất hiện trên biên tấm là phản lực do dầm tác dụng lên tấm và ngược lại dầm cũng chịu các áp lực (như tải trọng) từ tấm truyền xuống qua các lực phân bố và mômen xoắn phân bố trên dầm. Từ sự đồng thời biến dạng của biên tấm và dầm, sử dụng các phương trình vi phân dầm như đã biết, ta có:

$$\begin{cases} -E_d J_d \left(\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)\Bigg|_{y=b} = -D\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\Bigg|_{y=b} \\ -G_d J^d_{\text{xoắn}} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\Bigg|_{y=b} = D\left(\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{y=b} \end{cases} \quad (1.17)$$

1.6. Tấm ELIP:



Xét bài toán có hình dạng elip (như hình vẽ) chịu tải trọng phân bố đều q và ngàm trên biên. Phương trình biên tấm có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ và } \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{(a)}$$

Ta tìm hàm độ võng w trong dạng:

$$w = C\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 \quad \text{(b)}$$

trong đó: C là hằng số.

Để xác định C, ta đưa w vào phương trình vi phân chủ đạo của tấm (1.10):

$$\frac{24C}{a^4} + 2\frac{8C}{a^2b^2} + \frac{24C}{b^4} = \frac{q}{D}$$

Suy ra: $$C = \frac{q}{D\left(\dfrac{24}{a^2} + \dfrac{16}{a^2b^2} + \dfrac{24}{b^2}\right)} \quad \text{(c)}$$

Rõ ràng hàm độ võng w như trong công thức b) là thỏa mãn điều kiện ngàm trên biên. Vì tại mọi điểm trên biên, hàm w đều cho giá trị w=0.

Và vì: $$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{4Cx}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{4Cy}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

đều cho giá trị 0 trên biên, thỏa mãn điều kiện góc xoay trên biên bằng 0.

Vậy hàm độ võng của tấm mà vừa thỏa mãn phương trình vi phân chủ đạo của tấm, vừa thỏa mãn điều kiện biên là:

$$w = \frac{q}{D\left(\dfrac{24}{a^2} + \dfrac{16}{a^2b^2} + \dfrac{24}{b^2}\right)}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2$$

Độ võng lớn nhất tại tâm tấm là:

$$w_{\max} = \frac{q}{D\left(\dfrac{24}{a^2} + \dfrac{16}{a^2b^2} + \dfrac{24}{b^2}\right)} = C$$

Các thành phần nội lực được xác định theo công thức (1.9) như sau:

$$M_x = -4CD\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{\nu}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1\right)\right]$$

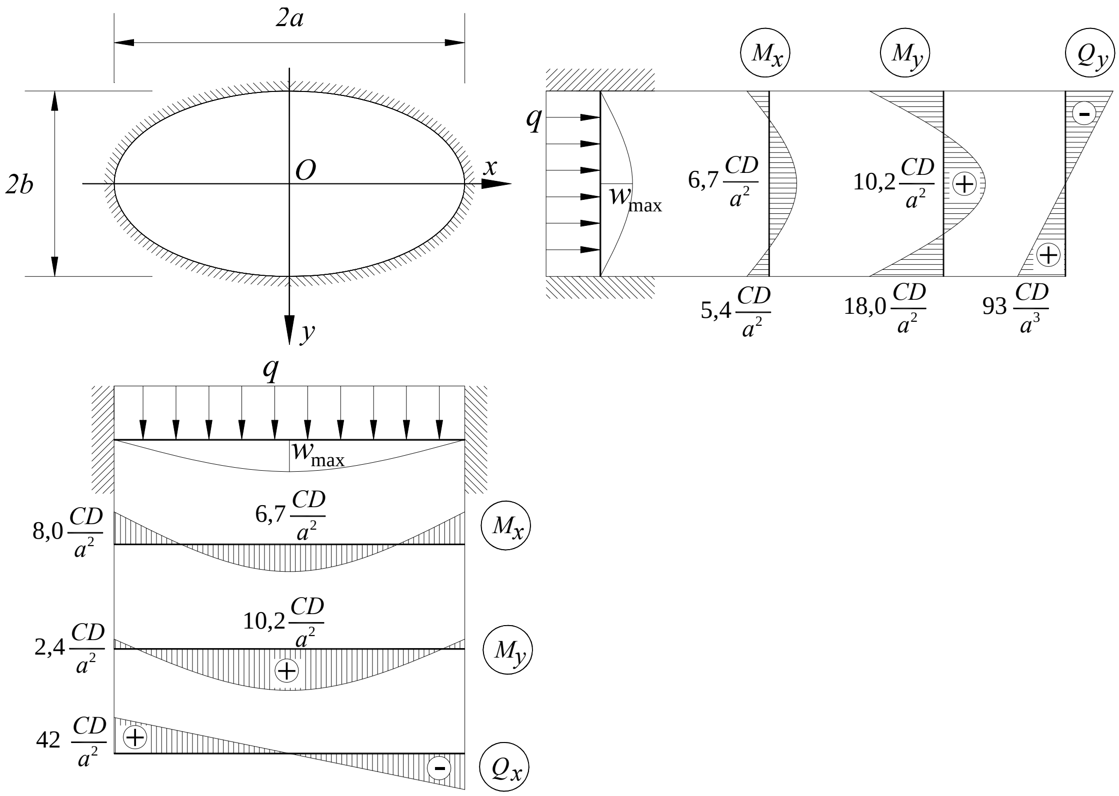
$$M_y = -4CD\left[\frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{\nu}{a^2}\left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -\frac{8CD}{a^2b^2}(1-\nu)xy$$

$$Q_x = -\frac{8CD}{a^4b^2}\left(a^2 + 3b^2\right)x$$

$$Q_y = -\frac{8CD}{a^2b^4}\left(3a^2 + b^2\right)y$$

• Ví dụ hình dưới đây là biểu đồ momen và lực cắt trên 2 trục đối xứng tấm với tỷ lệ $\frac{a}{b} = 1,5$ và hệ số poison $\nu = 0,3$



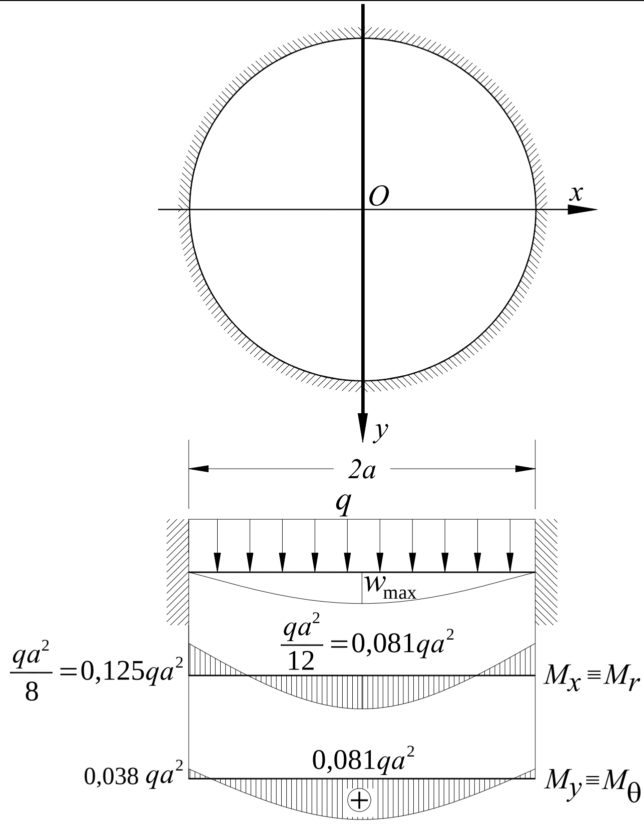
• Với tấm tròn (cho a=b): dễ thấy rằng độ võng lớn nhất tại tâm tấm (x=0 và y=0):

$$w_{\max} = \frac{q}{64D}$$

Do tính chất đối xứng tâm của bài toán, người ta thường dùng M_r và M_θ thay vì M_x và M_y, trong đó:

+ M_r là momen uốn trên mặt cắt vuông góc với bán kính.

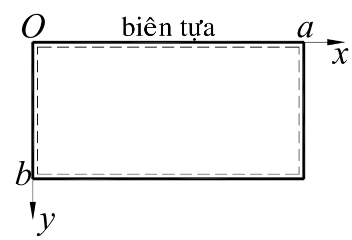
+ M_θ là momen uốn trên mặt cắt trùng với bán kính.



1.7. Tấm chữ nhật biên tựa với nghiệm Navier:

1.7.1. Cơ sở lý thuyết:

Xét 1 tấm chữ nhật có các cạnh là gối cố định như hình và tấm chịu tải trọng phân bố $p(x, y)$.



Do các cạnh là gối tựa các điều kiện cần ban đầu là:

$$\text{Tại x} = 0 \text{ và x} = \text{a}: \begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Tại y} = 0 \text{ và y} = \text{b}: \begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Ngoài ra, hàm độ võng *w(x,y)* phải thỏa mãn phương trình vi phân tấm (1.10):

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] = p(x, y)$$

Để thỏa mãn phương trình vi phân tấm (1.10) và các điều kiện biên (a), người ta tìm hàm độ võng trong dạng chuỗi Fourier kép:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \text{(c)}$$

trong đó: A_{mn} là hệ số của chuỗi

$m,n\in\square^{*}\ \left(m,n=1,2,3,...\right)$,

- Rõ ràng dễ nhận thấy rằng hàm độ võng (c) thỏa mãn các điều kiện biên (a).

+ Thật vậy, ví dụ trên biên x = a:

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin m\pi\sin\frac{n\pi y}{b}=0$$

+ Ngoài ra, vì:
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\end{cases}\tag{d}$$

nên
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a,y)=-\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\sin m\pi\sin\frac{n\pi y}{b}=0\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}(a,y)=-\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\sin m\pi\sin\frac{n\pi y}{b}=0\end{cases}\Rightarrow\left.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right|_{x=a}=0$$

- Đưa hàm độ võng *w(x,y)* dạng (c) vào phương trình vi phân tấm $\nabla^4 w=p$, ta có:

$$D\pi^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=p(x,y)\tag{e}$$

Để xác định các hệ số A_{mn}, ta tiến hành khai triển hàm tải trọng $p(x,y)$ theo dạng chuỗi Fourier kép theo sin, ta có:

$$p(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\tag{f}$$

trong đó: p_{mn} là hệ số chuỗi tải trọng.

$$p_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy\tag{g}$$

Đưa (f) vào phương trình (e), ta nhận được:

$$D\pi^4A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2=p_{mn}$$

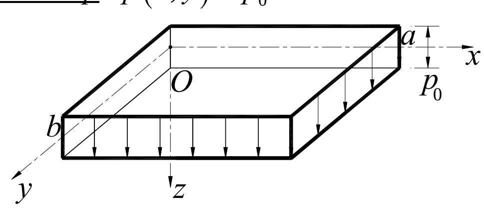
Sử dụng cả (g), ta có công thức xác định A_{mn}:

$$A_{mn}=\frac{4}{D\pi^4ab\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_0^a\int_0^b p(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy\tag{h}$$

Vậy hàm độ võng dạng (c) với các hệ số của chuỗi được xác định theo (h) vừa thỏa mãn phương trình vi phân tấm và cả các điều kiện biên tấm nên là nghiệm của bài toán.

1.7.2. Một số trường hợp tải trọng cụ thể:

1) Tải trọng phân bố đều p: $p(x,y)=p_0=\text{const}$



Khi đó: $$A_{mn}=\frac{4p_0}{D\pi^4ab\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_0^a\sin\frac{m\pi x}{a}dx\int_0^b\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

$$A_{mn}=\frac{16p_0}{D\pi^6mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\qquad\begin{pmatrix}m=1,3,5,...\\n=1,3,5,...\end{pmatrix}$$

Vậy: $$w(x,y)=\frac{16p_0}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\qquad\begin{pmatrix}m=1,3,5,...\\n=1,3,5,...\end{pmatrix}$$

• Sử dụng (1.9) để tính nội lực, ta được kết quả sau:

$$M_x=\frac{16p_0a^2}{\pi^4}\sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}\frac{\frac{m^2}{a^2}+\nu\frac{n^2}{b^2}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$M_y=\frac{16p_0a^2}{\pi^4}\sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}\frac{\nu\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Độ võng ở tâm tấm $\left(x=\frac{a}{2};y=\frac{a}{2}\right)$:

$$w_{\max}=\frac{16p_0}{D\pi^6}\sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}=\frac{192p_0}{\pi^6Eh^3}\left(1-\nu^2\right)\sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

Chuỗi này hội tụ nhanh và chỉ cần lấy số hạng đầu cũng cho kết quả đủ chính xác. Thật vậy, ví dụ trường hợp tấm vuông cạnh a, với ν=0.3, nếu chỉ lấy số hạng đầu (m=n=1):

$$w_{\max}=\frac{4p_0a^4}{D\pi^6}=0,00416\frac{p_0a^4}{D}=0,0454\frac{p_0a^4}{Eh^3}\qquad\text{(sai số 2,5\%)}$$

Tuy nhiên, đối với nội lực, do phép lấy đạo hàm, chuỗi hội tụ chậm hơn nhiều và phải lấy nhiều số hạng hơn.

Để tiện tính toán thực hành, người ta thường lập bảng sẵn theo cách như sau:

+ Tính: $$w_{\max}=\alpha\frac{p_0a^4}{Eh^3}$$

với: $$\alpha=\frac{192\left(1-\nu^2\right)}{\pi^6}\sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\qquad(m,n=1,3,5,...)$$

và α chỉ phụ thuộc vào tỉ số giữa 2 cạnh a/b

+ Cũng tương tự như vậy, người ta cũng lập bảng tính momen uốn lớn nhất tại tâm bảng trong dạng:

$$\begin{cases}{}_{\max}M_x=\beta_xp_0a^2\\{}_{\max}M_y=\beta_yp_0a^2\end{cases}$$

trong đó: β_x, β_y là các hệ số chỉ phụ thuộc vào tỉ số a/b

+ Các lực cắt Q_x, Q_y cũng vậy:

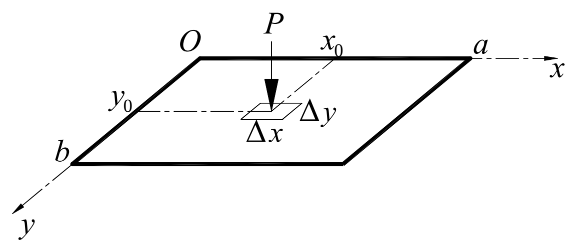
$$Q_x = \frac{16p_0a}{\pi^3}\sum_m^\infty\sum_n^\infty \frac{\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{n\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)}$$

$$Q_y = \frac{16p_0b}{\pi^3}\sum_m^\infty\sum_n^\infty \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}}{m\left(m^2\frac{b^2}{a^2}+n^2\right)}$$

và lực cắt lớn nhất tại các điểm giữa các cạnh biên tấm.

2) <u>Tấm chịu lực tập trung đặt tải điểm</u> (x_0, y_0):

Bằng cách thay lực tập trung P bằng lực phân bố trong phạm vi chữ nhật có diện tích $\Delta_x.\Delta_y$, lực phân bố này có cường độ: $p = \frac{P}{\Delta_x\Delta_y}$ thì dễ dàng tính được hệ số phân bố tải trọng như sau:



$$\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}}\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} p(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy = P\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}$$

Sử dụng công thức (h), ta có công thức tính hệ số chuỗi như sau:

$$A_{mn} = \frac{4P}{D\pi^4ab\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}$$

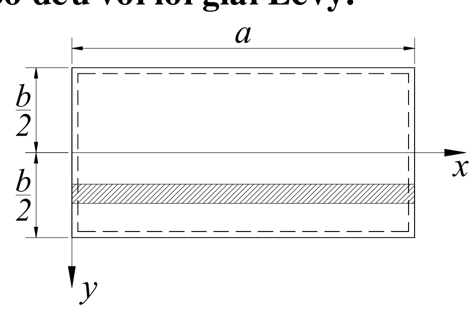
Và hàm độ võng: $w(x,y) = \frac{4P}{D\pi^4ab}\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$

➢ Chuỗi này hội tụ chậm và các chuỗi momen, lực cắt còn hội tụ chậm hơn nữa nên với bài toán này chỉ dùng để tính độ võng.

1.8. Tấm chữ nhật biên tựa chịu tải phân bố đều với lời giải Levy:

Lévy đưa ra lời giải của bài toán này bằng cách chọn *w* có dạng:

$$w = w_p + w_h \quad \text{(a)}$$



trong đó: w_p được xem là phương trình độ võng của 1 dải song song chịu tải trọng phân bố đều và có dạng:

$$w_p = \frac{p_0}{24D}\left(x^4 - 2ax^3 + a^3x\right) \quad \text{(b)}$$

Rõ ràng w_p thỏa mãn phương trình vi phân tấm (1.10):

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_0}{D} \tag{c}$$

và điều kiện biên tại 2 cạnh tựa đối diện nhau: $x = 0$ và $x = a$

- Còn w_h cần chọn sao cho thỏa mãn phương trình thuần nhất của (c), tức là:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \tag{d}$$

Và $w = w_p + w_h$ thỏa mãn tất cả điều kiện biên của tấm.

Lévy đưa ra dạng chuỗi sau đối với w_h (và vì tính đối xứng nên m = 1, 3, 5 ...)

$$w_p = \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} Y_m(y) \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{e}$$

trong đó: $Y_m(y)$ chỉ là hàm riêng của biến y

Rõ ràng $w = w_p + w_h$ thỏa mãn điều kiện biên $w = 0 \,\&\, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ tại 2 cạnh biên đối diện nhau là $x = 0$ và $x = a$.

Thay w_p vào (d), ta được: $\sum_{m=1}^{\infty}\left(Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4}Y_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a} = 0$

Và để thỏa mãn mọi giá trị của x, ta có:

$$Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4}Y_m = 0 \tag{f}$$

Nghiệm tổng quát của (f) được cho trong dạng:

$$Y_m = \frac{p_0 a^4}{D}\left(A_m \cosh\frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh\frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right) \tag{g}$$

Vì bài toán đối xứng qua trục x nên trong (g) chỉ giữ lại các hàm chẵn của y hay suy ra $C_m = D_m = 0$

- Vậy hàm độ võng w sẽ là:

$$w = w_p + w_h =$$

$$= \frac{p_0}{24D}\left(x^4 - 2ax^3 + a^3x\right) + \frac{pa^4}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m \cosh\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{h}$$

- Rõ ràng w dạng (h) đã thỏa mãn phương trình vi phân tấm $\nabla^4 w = \frac{p(x)}{D}$ và thỏa mãn điều kiện biên 2 biên tựa đối diện nhau $x = 0$ và $x = a$.

Các hằng số tích phân A_m & B_m được xác định sao cho thỏa mãn điều kiện biên trên 2 biên còn lại là biên $y = \pm b/2$

Muốn vậy, trước hết cần khai triển $w_p = \frac{p_0}{24D}\left(x^4 - 2ax^3 + a^3x\right)$ thành chuỗi lượng giác:

$$w_p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\frac{m\pi x}{a}$$

trong đó: $w_m = \frac{2}{a}\int_0^a w_p(x)\sin\frac{m\pi x}{a}dx = \frac{2}{a}\int_0^a\left[\frac{p_0}{24D}\left(x^4 - 2ax^3 + a^3x\right)\right]\sin\frac{m\pi x}{a}dx$

$$w_m = \frac{4p_0a^4}{D\pi^5}.\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{m^5}$$

$$\Rightarrow w_p = \frac{p_0}{24D}\left(x^4 - 2ax^3 + a^3x\right) = \frac{4p_0a^4}{D\pi^5}.\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{m^5}.\sin\frac{m\pi x}{a}$$

Và khi đó w có dạng:

$$w = \frac{p_0a^4}{D}\sum_{m=1,3,5...}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^5m^5} + A_m\cosh\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \qquad \text{(i)}$$

Tại biên $y = \pm b/2$: từ điều kiện biên: $w = 0$ & $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

Ta được 2 phương trình xác định A_m & B_m ; với cách ký hiệu: $\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m$

<u>Chú ý</u>: $\begin{cases}\sinh' x = \cosh x \\ \cosh' x = \sinh x\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\tanh' x = 1 - \tanh^2 x \\ \coth' x = 1 - \coth^2 x\end{cases}$

$$\begin{cases}\frac{4}{\pi^5m^5} + A_m\cosh\alpha_m + \alpha_m B_m\sinh\alpha_m = 0 \\ \left(A_m + 2B_m\right)\cosh\alpha_m + \alpha_m B_m\sinh\alpha_m = 0\end{cases} \qquad \text{với: } m \text{ lẻ}$$

Rút ra: $A_m = -\frac{2\left(\alpha_m\tanh\alpha_m + 2\right)}{\pi^5m^5\cosh\alpha_m}, B_m = \frac{2}{\pi^5m^5\cosh\alpha_m}$

Thay vào (i), cuối cùng hàm độ võng có dạng như sau:

$$\boxed{w = \frac{4p_0a^4}{D\pi^5}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{m^5}\left[1 - \frac{\alpha_m\tanh\alpha_m + 2}{2\cosh\alpha_m}\cosh\frac{2\alpha_m y}{a} + \frac{\alpha_m}{2\cosh\alpha_m}\frac{2y}{a}\sinh\frac{2\alpha_m y}{a}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}} \qquad \text{(j)}$$

Độ võng lớn nhất tại tâm tấm $\left(x = \frac{a}{2}, y = 0\right)$:

$$w_{\max} = \frac{4p_0a^4}{D\pi^5}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\left(1 - \frac{\alpha_m\tanh\alpha_m + 2}{2\cosh\alpha_m}\right) \qquad \text{(k)}$$

<u>Nhận xét:</u> số hạng thứ I trong dấu ngoặc của (k) tương ứng với độ võng ở giữa dải chịu tải trọng phân bố đều. Vậy có thể viết lại (k) trong dạng sau:

$$w_{\max} = \frac{5}{384}\frac{p_0a^4}{D} - \frac{4p_0a^4}{D\pi^5}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}.\frac{\alpha_m\tanh\alpha_m + 2}{2\cosh\alpha_m} \qquad \text{(l)}$$

Chuỗi ở số hạng thứ II hội tụ rất nhanh nên chỉ lấy số hạng đầu là đủ.

Ví dụ với bài toán tấm hình vuông, dễ thấy:

$$w_{\max} = \frac{5}{384}\frac{p_0a^4}{D} - \frac{4p_0a^4}{D\pi^5}\left(\overset{m=1}{0,68562} - \overset{m=3}{0,00025} + ...\right) = 0,00406\frac{p_0a^4}{D}$$

và số hạng thứ II trong ngoặc là quá nhỏ so với số hạng đầu nên có thể bỏ qua.

Từ công thức (l) người ta cũng có thể tính độ võng lớn nhất tại tâm tấm chữ nhật biên tựa và chịu tải trọng phân bố đều trong dạng sau:

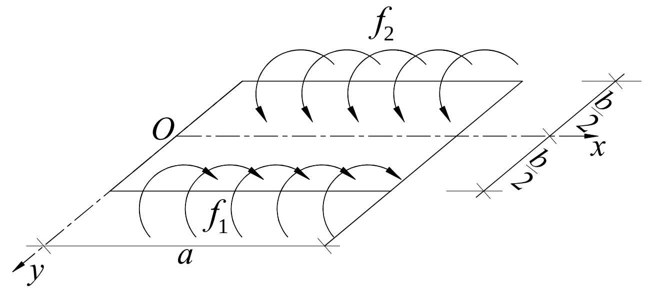
$$w_{\max} = \alpha.\frac{p_0a^4}{D}$$

với α là hệ số phụ thuộc vào tỉ số b/a và cho trong bảng lập sẵn.

Tương tự, dựa vào các công thức cơ bản đã có, ta cũng tìm được các thành phần nội lực.

1.9. Tấm chữ nhật chịu uốn bởi momen phân bố tại các cạnh:

Xét tấm tựa trên 4 cạnh biên và bị uốn cong do momen phân bố dọc các cạnh $y = \pm b/2$. Hàm độ võng w phải thỏa mãn phương trình vi phân tấm:



$$\nabla^4 w = 0 \qquad (a)$$

và các điều kiện biên sau:

+ Trên biên x=0 và x=a: $\begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$ (b)

+ Trên biên $y = \pm b/2$: $\begin{cases} w = 0 & (c) \\ -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=\frac{b}{2}} = f_1(x) & \\ & (d) \\ -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=-\frac{b}{2}} = f_2(x) & \end{cases}$

với $f_1(x), f_2(x)$ là momen uốn phân bố trên 2 biên $y = \pm b/2$.

Sử dụng nghiệm dạng Levy: (luôn thỏa mãn điều kiện trên x=0, x=a)

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (e)$$

với: $Y_m(y) = A_m \sinh\frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh\frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}$ (f)

1.9.1. Trường hợp đối xứng $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$:

Do bài toán là đối xứng nên Y_m phải là hàm chẵn của $y \Rightarrow A_m = D_m = 0$. Khi này, hàm độ võng có dạng:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\left(B_m \cosh\frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

B_m & C_m được xác định từ điều kiện biên (c) và (d) như sau:

+ Từ (c), trên $y = \pm b/2$ thì $w = 0$, ta có:

$$B_m \cosh\alpha_m + C_m\alpha_m \sinh\alpha_m = 0 \qquad \text{với: } \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

Hay $B_m = -C_m\alpha_m \tanh\alpha_m$

và $w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m\left(\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \tanh\alpha_m \cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}$

+ Để tìm C_m, ta sử dụng điều kiện biên (d):

Trước hết cần khai triển f(x) thành chuỗi lượng giác (theo $\sin\frac{m\pi x}{a}$):

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\frac{m\pi x}{a}$$

Khi momen phân bố là hằng số trên biên thì $f(x) = M_0$

Dễ thấy: $E_m = \dfrac{2}{a}\int_0^a M_0 \sin\dfrac{m\pi x}{a}dx = \dfrac{4M_0}{\pi m}$ $\quad (\text{với } m = 1,3,5,\ldots)$

Sử dụng điều kiện biên (d), ta tìm được: $C_m = -\dfrac{a^2 E_m}{2Dm^2\pi^2 \cosh\alpha_m}$

Và cuối cùng ta có hàm độ võng như sau:

$$\boxed{w(x,y) = \frac{a^2}{2D\pi^2}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}}{m^2\cosh\alpha_m}E_m\left(\alpha_m \tanh\alpha_m \cosh\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)} \tag{g}$$

Khi momen phân bố đều có cường độ M_0 thì hàm độ võng có dạng:

$$w(x,y) = \frac{2M_0 a^2}{D\pi^3}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m^2\cosh\alpha_m}\left(\alpha_m \tanh\alpha_m \cosh\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{h}$$

1.9.2. Trường hợp phản xứng f₁(x) = –f₂(x):

$$f_1(x) = -f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{i}$$

Do tính chất phản xứng, *w* sẽ là hàm lẻ của *y,* do đó, trong công thức (f) thì $B_m = C_m = 0$. Nên:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m \sin\frac{m\pi y}{a} + D_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

Từ điều kiện biên (c), $w = 0$ tại $y = \pm b/2$, ta suy ra:

$$A_m \sinh\alpha_m + D_m\alpha_m \cosh\alpha_m = 0$$

Hay $D_m = -\dfrac{1}{\alpha_m}\tanh\alpha_m A_m$

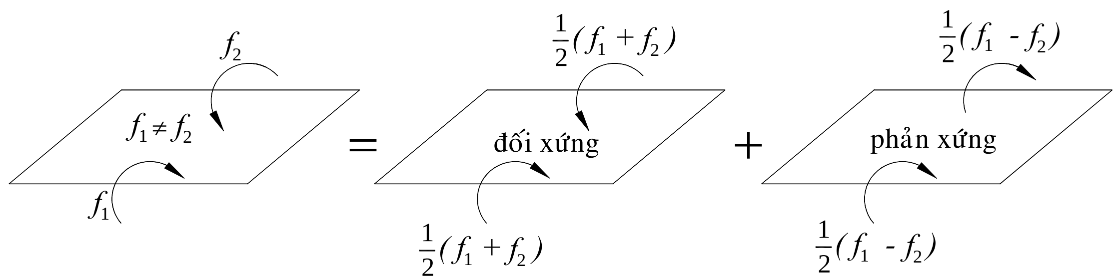
Và: $\quad w = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} A_m\left(\sin\frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{\alpha_m}\tanh\alpha_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}$

Sử dụng điều kiện biên (d) để xác định A_m, ta có:

$$A_m = \frac{a^2}{2D\pi^2}E_m\frac{\alpha_m}{m^2 \sinh\alpha_m \tanh\alpha_m}$$

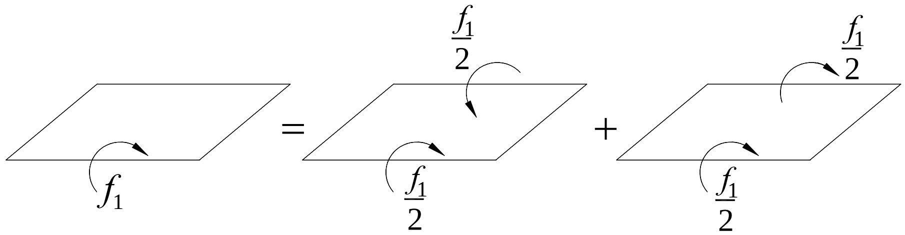
Và: $$\boxed{w = \frac{a^2}{2D\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_m}{m^2\sinh\alpha_m}\left(\alpha_m \coth\alpha_m \sinh\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}} \tag{j}$$

1.9.3. Trường hợp tổng quát:



1.9.4. Trường hợp đặt biệt:

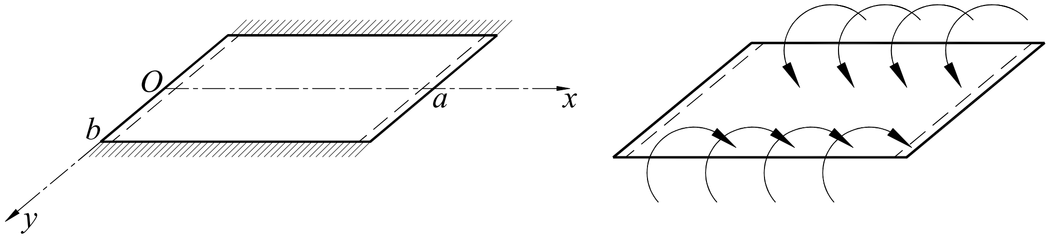
Khi momen phân bố chỉ trên 1 cạnh biên $y=\frac{b}{2}$ chẳng hạn thì ta sẽ sử dụng kết quả tổng quát với $f_2=0$, tức sơ đồ:



và kết quả là:

$$w=\frac{a^2}{4D\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_m\sin\frac{m\pi x}{a}}{m^2}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\cosh\alpha_m}\left(\alpha_m\tanh\alpha_m\cosh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)\\+\frac{1}{\sinh\alpha_m}\left(\alpha_m\coth\alpha_m\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\end{array}\right] \quad \text{(k)}$$

1.10. Tấm chữ nhật có 2 cạnh tựa cố định, còn 2 cạnh kia là ngàm:



Giả sử 2 cạnh biên tựa là x=0 và x=a. Hai cạnh biên ngàm là $y=\pm b/2$. Để giải bài toán này, trước hết ta xem tất cả các cạnh biên là tựa, sau đó đặt momen uốn trên các cạnh $y=\pm b/2$ sao cho chúng khử được góc xoay do tải trọng ngang gây ra tại các cạnh này và sau đó có thể sử dụng các kết quả trước.

- Trường hợp tấm chịu tải phân bố đều có cường độ p_0. Sử dụng lời giải Levy (công thức (j) trong mục 1.8) khi xem các biên tấm là tựa:

$$w=\frac{4p_0a^4}{D\pi^5}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{a}\left[1-\frac{\alpha_m\tanh\alpha_m+2}{2\cosh\alpha_m}\cosh\frac{2\alpha_m y}{a}+\frac{\alpha_m}{2\cosh\alpha_m}\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{2\alpha_m y}{a}\right] \quad \text{(a)}$$

Dễ thấy góc xoay (hay độ dốc) của mặt võng tại cạnh $y=\frac{b}{2}$ là:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}}=\frac{2p_0a^3}{D\pi^4}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{m^4}\sin\frac{m\pi x}{a}\left[\alpha_m-\tanh\alpha_m\left(1+\alpha_m\tanh\alpha_m\right)\right] \quad \text{(b)}$$

- Còn trong trường hợp 4 biên tựa này chịu momen phân bố trên 2 biên $y=\pm b$ thì độ dốc của mặt võng (hay góc xoay của tấm) tại cạnh $y=\frac{b}{2}$ dễ dàng tìm được từ công thức (g) trong mục 1.9 như sau:

$$-\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}}=-\frac{a}{2D\pi}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}}{m}E_m\left[\tanh\alpha_m\left(\alpha_m\tanh\alpha_m-1\right)-\alpha_m\right] \quad \text{(c)}$$

Như đã nói ở trên, từ điều kiện: $\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = -\left(\dfrac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}}$ (điều kiện khử góc xoay tại ngàm), ta rút ra hệ số của chuỗi tải trọng momen phân bố trên biên bảo đảm khử góc xoay:

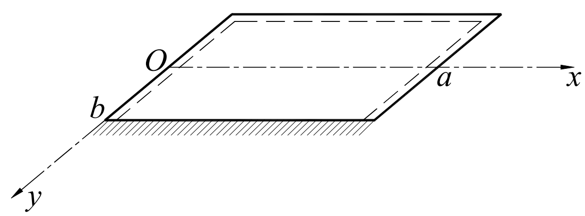
$$E_m = \frac{4p_0a^2}{\pi^3 m^3}\cdot\frac{\alpha_m - \tanh\alpha_m\left(1+\alpha_m\tanh\alpha_m\right)}{\alpha_m - \tanh\alpha_m\left(\alpha_m\tanh\alpha_m - 1\right)} \tag{d}$$

Thay giá trị của E_m từ (d) vào công thức (g) trong mục 1.9, ta tìm được w_2, tức là độ võng do momen phân bố trên biên ngàm gây ra:

$$w_2 = -\frac{2p_0a^4}{D\pi^5}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}}{m^5\cosh\alpha_m}\cdot\frac{\alpha_m - \tanh\alpha_m\left(1+\alpha_m\tanh\alpha_m\right)}{\alpha_m - \tanh\alpha_m\left(\alpha_m\tanh\alpha_m - 1\right)}\cdot\left(\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} - \alpha_m\tanh\alpha_m\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)$$

và độ võng cuối cùng cần tính là: $w = w_1 + w_2$

1.11. Tấm chữ nhật có 3 cạnh tựa và 1 cạnh ngàm:



Tìm w bằng cách kết hợp các kết quả đã có trên: $w = w_1 + w_2$

trong đó: w_1 là độ võng của tấm biên tựa chịu tải trọng ngang.

w_2 là độ võng của tấm biên tựa chịu momen phân bố tại 1 cạnh biên tại $y = \dfrac{b}{2}$. Mà momen phân bố này có giá trị được xác định từ điều kiện khử góc xoay tại cạnh biên $y = \dfrac{b}{2}$ hay cụ thể:

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = -\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}}$$

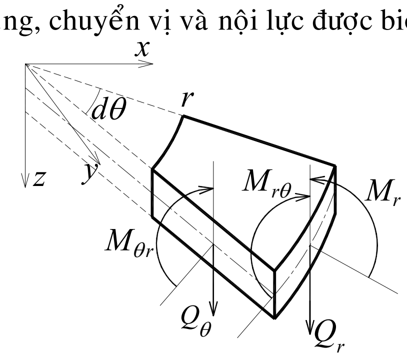
trong đó: w_1 sử dụng công thức (j) trong mục 1.8. (khi lực ngang là phân bố đều).

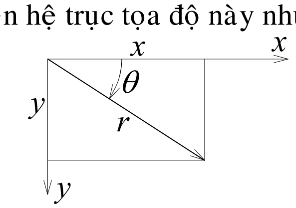
w_2 sử dụng công thức (k) trong mục 1.9.4 (khi lực ngang là phân bố đều).

Từ điều kiện này xác định được hệ số E_m của chuỗi tải trọng momen phân bố trên biên: $\left(M_y\right)_{\text{biên}} = f = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} E_m \sin\dfrac{m\pi x}{a}$

1.12. Các phương trình cơ bản của tấm tròn chịu uốn:

Với tấm tròn thì rõ ràng sử dụng hệ tọa độ cực là tiện lợi hơn cả. Khi đó, các thành phần biến dạng, chuyển vị và nội lực được biểu diễn trên hệ trục tọa độ này như sau:





Trong hệ tọa độ cực, hàm độ võng và tải trọng sẽ là hàm của biến r & θ:

$$\begin{cases} w = w(r,\theta) \\ p_z = p_z(r,\theta) \end{cases}$$

Công thức quan hệ giữa tọa Decac và tọa độ cực:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{1}{r}\sin\theta \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{1}{r}\cos\theta \end{cases}$$

Toán tử ∇^2 trong hệ tọa độ cực là:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Để dẫn tới dạng trên, chỉ cần chú ý rằng: $w = w\left[r(x,y),\theta(x,y)\right]$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + 2\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

Tương tự, ta tìm được: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}(r,\theta)$

Rồi thay vào: $\nabla^2 w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

Vậy, phương trình vi phân chủ đạo của tấm tròn chịu uốn trong hệ tọa độ cực là:

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)w = \frac{p_z}{D} \tag{1.18}$$

Các thành phần nội lực được biểu diễn qua w trong hệ tọa độ cực là:

$$\begin{cases} M_r = -D\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\right] \\ M_\theta = -D\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right] \\ M_\theta = -D(1-\nu)\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right) \\ Q_r = -D\dfrac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w = -D\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \\ Q_\theta = -D\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\nabla^2 w = -D\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \end{cases} \tag{1.19}$$

Các lực cắt quy đổi:

$$\begin{cases} Q_r^{qd} = Q_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta} = -D\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w + (1-\nu)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right] \\ Q_\theta^{qd} = Q_\theta + \dfrac{\partial M_{\theta r}}{\partial r} = -D\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w + (1-\nu)\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right] \end{cases} \tag{1.20}$$

1.13. Tấm tròn chịu uốn đối xứng trục:

Bài toán tấm tròn chịu uốn được gọi là đối xứng trục nếu tải trọng cũng như điều kiện biên ở mép tấm không phụ thuộc góc cực θ. Khi đó độ võng của tấm sẽ không phụ thuộc vào góc cực θ và sẽ chỉ là hàm theo biến r, tức là $w = w(r)$. Khi đó, phương trình vi phân của mặt trung bình tấm sẽ là:

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = p_z$$

$$\text{Hay } D\left(\frac{d^4 w}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3 w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}\right) = p_z \tag{1.21}$$

Và các thành phần nội lực cũng vậy:

$$\begin{cases} M_r = -D\left(\dfrac{d^2 w}{dr^2}+\dfrac{\nu}{r}\dfrac{dw}{dr}\right) \\ M_\theta = -D\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr}+\nu\dfrac{d^2 w}{dr^2}\right) \\ M_{r\theta} = M_{\theta r} = 0 \\ Q_r = -D\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{d^2 w}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr}\right) \\ Q_\theta = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

Các lực quy đổi:

$$\begin{cases} Q_r^{qd} = Q_r \\ Q_\theta^{qd} = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

Phương trình (1.21) có thể tìm được nghiệm tổng quát. Đây là phương trình vi phân không thuần nhất mà nghiệm tổng quát của nó là:

$$w = w_1 + \overline{w}$$

trong đó, w_1 là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (1.21).

$$\frac{d^4 w_1}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3 w_1}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2 w_1}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw_1}{dr} = 0$$

Có dạng: $w_1 = C_1 + C_2.\ln r + C_3.r^2 + C_4.r^2.\ln r$ (1.24)

Và $\overline{w}$ là 1 nghiệm riêng của phương trình (1.21).

Để tìm $\overline{w}$, ta viết lại (1.21) trong dạng:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{p(r)}{D}$$

Bằng cách tích phân trực tiếp 4 lần phương trình này, ta sẽ tìm được $\overline{w}$:

$$\overline{w}=\frac{1}{D}\int_0^r\frac{1}{r}\left\{\int_0^r r\left[\int_0^r\frac{1}{r}\left(\int_0^r rp(r)dr\right)dr\right]dr\right\}dr$$

Ví dụ: Với trường hợp tải trọng phân bố đều thì $\overline{w}=\dfrac{pr^4}{64D}$ và nghiệm tổng quát của phương trình (1.21): $w=\dfrac{pr^4}{64D}+C_1+C_2.\ln r+C_3.r^2+C_4.r^2.\ln r$

1.13.1. Bài toán tấm tròn biên tựa cố định và chịu tải trọng phân bố đều:

Để xác định các hằng số tích phân trong (1.24), ta cần sử dụng các điều kiện biên sau:

• Tại tâm tấm (với r=0) thì độ võng cần có giá trị hữu hạn vì $\ln 0=-\infty$ nên các hệ số đứng trước các số hạng chứa $\ln r$ phải bằng 0, tức là: $C_2=C_4=0$

Khi đó, nghiệm (1.24) có dạng: $w=\dfrac{qr^4}{64D}+C_1+C_3.r^2$

• Còn đối với biên tấm (khi r=a) thì độ võng và M_r cần bằng 0. Hay:

$$w\big|_{r=a}=0 \text{ và } \left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)_{r=a}=0$$

Từ đây, ta có: $\begin{cases}\dfrac{pa^4}{64D}+C_1+C_3a^2=0\\[2mm] \dfrac{3pa^2}{16D}+2C_3+\dfrac{\nu}{a}\left(\dfrac{pa^3}{16D}+2C_3a\right)=0\end{cases}$

Rút ra: $\begin{cases}C_1=\dfrac{3+\nu}{1+\nu}.\dfrac{pa^2}{32D}-\dfrac{pa^2}{64D}\\[2mm] C_3=-\dfrac{3+\nu}{1+\nu}.\dfrac{pa^2}{32D}\end{cases}$

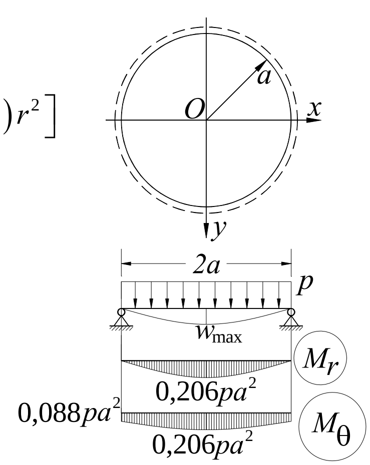
Cuối cùng ta có hàm độ võng *w*:

$$w=\frac{p\left(a^2-r^2\right)}{64D}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2-r^2\right)$$

Độ võng lớn nhất tại tâm tấm, tức r=0: $w_{\max}=\dfrac{5+\nu}{1+\nu}.\dfrac{pa^4}{64D}$

Theo (1.22), ta có các momen trong tấm:

$$\begin{cases}M_r=-D\left(\dfrac{d^2w}{dr^2}+\dfrac{\nu}{r}\dfrac{dw}{dr}\right)=\dfrac{p}{16}(3+\nu)\left(a^2-r^2\right)\\[2mm] M_\theta=-D\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr}+\nu\dfrac{d^2w}{dr^2}\right)=\dfrac{p}{16}\left[(3+\nu)a^2-(1+5\nu)r^2\right]\end{cases}$$



Và các giá trị momen uốn lớn nhất tại tâm tấm, tức r=0:

$$M_{r,\max}=M_{\theta,\max}=\frac{pa^2}{16}(3+\nu)$$

Tại biên, tức r=a:

$$\begin{cases}M_r=0\\[2mm] M_\theta=\dfrac{pa^2}{8}\left(1-\nu^2\right)\end{cases}$$

Các biểu đồ momen uốn với ν=0,3 được giới thiệu trong hình bên.

1.13.2. Bài toán tấm tròn biên ngàm và chịu tải phân bố đều:

Từ điều kiện biên: $\begin{cases} w\big|_{r=a} = 0 \\ \dfrac{dw}{dr}\Big|_{r=a} = 0 \end{cases}$ với $w = \dfrac{pa^4}{64D} + C_1 + C_3.r^2$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{pa^4}{64D} + C_1 + C_3.a^2 = 0 \\ \dfrac{pa^3}{16D} + 2C_3.a = 0 \end{cases}$

Từ đó: $\begin{cases} C_1 = \dfrac{pa^4}{64D} \\ C_3 = -\dfrac{pa^2}{32D} \end{cases}$

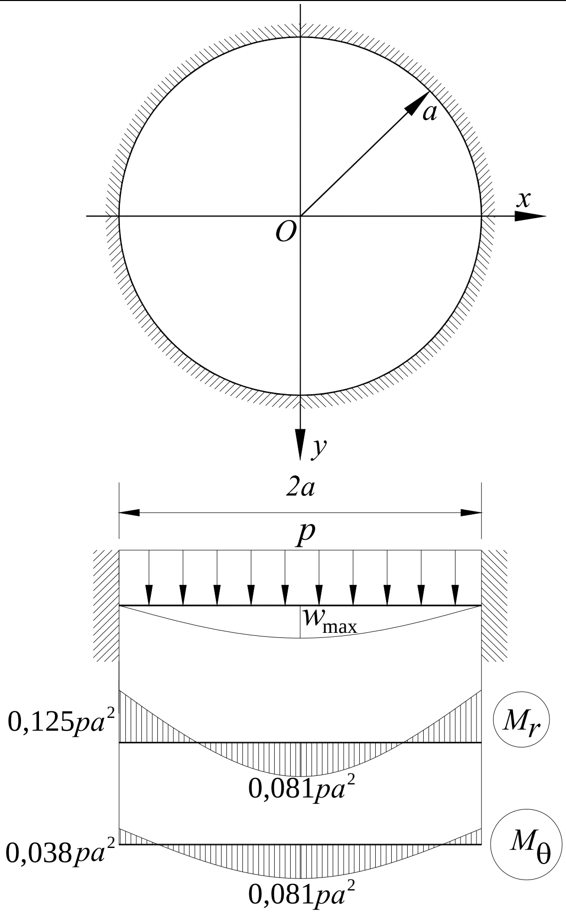
Và: $w = \dfrac{p}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2$

Độ võng lớn nhất tại tâm tấm: $w_{\max} = \dfrac{pa^4}{64D}$ (so với trường hợp biên tựa thì nhỏ hơn 4 lần). Sử dụng (1.22), ta có biểu thức momen uốn trong tấm:

$$\begin{cases} M_r = \dfrac{p}{16}\left[\left(1+\nu\right)a^2 - \left(3+\nu\right)r^2\right] \\ M_\theta = \dfrac{p}{16}\left[\left(1+\nu\right)a^2 - \left(1+3\nu\right)r^2\right] \end{cases}$$

Và momen tại tâm tấm khi khi r=0: $M_r = M_\theta = \dfrac{pa^2}{16}\left(1+\nu\right)$

Và momen uốn trên biên (ứng với r=a) và là momen max: $\begin{cases} M_r = -\dfrac{pa^2}{8} \\ M_\theta = -\nu\dfrac{pa^2}{8} \end{cases}$ (chỉ gần bằng 60% so với M_{max} khi biên tựa).

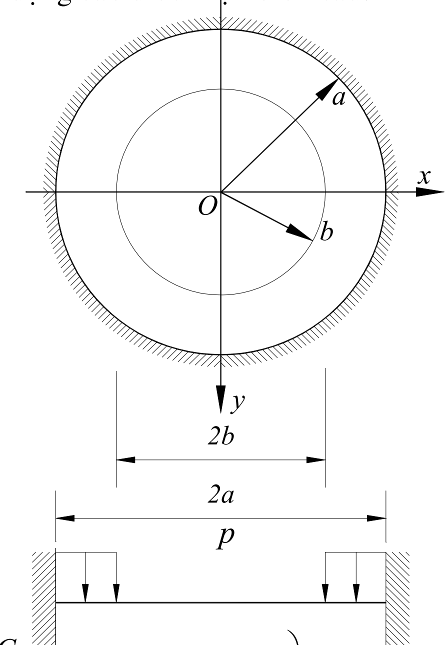


1.13.3. Bài toán tấm có tròn có lỗ, biên ngàm và chịu tải trọng phân bố đều:

Để xác định các hằng số tích phân trong (1.24), ta sử dụng các điều kiện biên sau:

Tại biên ngoài bị ngàm (r=a):

$$\begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{dw}{dr} = 0 \end{cases}$$



Tại biên trong tự do (r=b), cần có:

$$\begin{cases} M_r = -D\left(\dfrac{d^2w}{dr^2} + \dfrac{\nu}{r}\dfrac{dw}{dr}\right) = 0 \\ Q_r^{\text{qđ}} = -D\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{d^2w}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr}\right) = 0 \end{cases}$$

Từ đây, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{pa^4}{64D} + C_1 + C_2.\ln a + C_3.a^2 + C_4.a^2.\ln a = 0 \\ \dfrac{pr^3}{16D} + \dfrac{C_2}{a} + 2C_3.a + 2C_4.a.\ln a + C_4.a = 0 \\ \dfrac{3pb^2}{16D} - \dfrac{C_2}{b^2} + 2C_3 + 2C_4.\ln b + 3C_4 + \nu\left(\dfrac{pb^2}{16D} + \dfrac{C_2}{b^2} + 2C_3 + 2C_4.\ln b + C_4\right) = 0 \\ \dfrac{ab}{2D} + \dfrac{4C_4}{b} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được các hằng số tích phân rồi đưa vào công thức độ võng (1.24), cuối cùng ta có:

$$w=\frac{pa^4}{64D}\left[-1+2\left(1-k-2\beta^2\right)\left(1-\rho^2\right)+\rho^4-4k\ln\rho-8\beta^2\rho^2\ln\rho\right]$$

trong đó: $\rho=\dfrac{r}{a}$, $\beta=\dfrac{b}{a}$, $k=\dfrac{\left(1-\nu\right)\beta^2+\left(1+\nu\right)\left(1+4\beta^2\ln\beta\right)}{\left(1-\nu\right)+\left(1+\nu\right)\beta^2}\beta^2$

Các momen uốn cũng có thể tìm được từ (1.22).

1.14. Thế năng toàn phần:

Biểu thức thế năng toàn phần của tấm chịu uốn:

Π = U - A

trong đó: U là thế năng biến dạng của tấm và $U=\dfrac{1}{2}\int_V\sigma^T\varepsilon dV$

A là công của ngoại lực.

Cụ thể, theo giả thiết của Kirchhoff, $\sigma_z=0\,\&\,\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$ nên:

$$U=\frac{1}{2}\int_V\left(\varepsilon_x\varepsilon_x+\varepsilon_y\varepsilon_y+\varepsilon_z\varepsilon_z\right)dV$$

Thay các biểu thức ứng suất (1.6) và biến dạng (1.5) vào, ta có:

$$U=\frac{1}{2}\int_V\frac{Ez^2}{\left(1-\nu^2\right)}\left[\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+2\left(1-\nu\right)\left(\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dV$$

Cộng và trừ 2 số hạng $2\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2w}{\partial y^2}$ vào phần trong móc vuông rồi nhóm lại với chú ý là hàm độ võng chỉ là hàm của biến *x, y* nên ta có:

$$U=\frac{Ez^2}{\left(1-\nu^2\right)}\int_F\left\{\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)^2+2\left(1-\nu\right)\left[\left(\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right]\right\}dxdy.\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}z^2dz$$

Hay: $$\boxed{U=\frac{D}{2}\int_F\left\{\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)^2+2\left(1-\nu\right)\left[\left(\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right]\right\}dxdy}\qquad(1.25)$$

trong đó: *F* là diện tích mặt trung bình của tấm và tích phân được thực hiện trên toàn bộ bề mặt của mặt trung bình tấm.

<u>Chú ý</u>: biểu thức thế năng biến dạng của tấm có thể có dạng gọn hơn trong 1 vài trường hợp cụ thể như tấm có dạng bất kỳ ngàm suốt chu vi và tấm chữ nhật gối tựa trên toàn biên. Khi đó, thế năng biến dạng có dạng:

$$U=\frac{D}{2}\int_F\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)^2dxdy$$

Hay: $$U=\frac{D}{2}\int_F\left(\nabla^2w\right)^2dxdy\qquad(1.26)$$

Công ngoại lực trong trường hợp bài toán tấm:

$$A=\int_F wp_zdxdy+\int_{S_t}\left[\left(\overline{Q_n}+\frac{\partial\overline{M_{nt}}}{\partial t}\right)w-\overline{M_n}\frac{\partial w}{\partial n}\right]ds\qquad(1.27)$$

trong đó: tích phân thứ I được lấy khắp bề mặt mặt trung bình tấm, tích phân thứ II được lấy trên phần cạnh biên chịu lực.

Cuối cùng, thế năng toàn phần có dạng:

$$\Pi = \frac{D}{2}\int_F \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dxdy$$
$$-\int_F w p_z dxdy - \int_{S_t} \left[\left(\overline{Q_n} + \frac{\partial \overline{M_{nt}}}{\partial t} \right) w - \overline{M_n}\frac{\partial w}{\partial n} \right] dS \qquad (1.28)$$

1.15. Phương pháp Rayleigh – Ritz:

Như đã biết trong giáo trình đàn hồi, phần lớn các bài toán hồi đều dẫn tới việc giải hệ phương trình vi phân ở dạng đạo hàm riêng với các điều kiện biên cụ thể đối với mỗi bài toán mà lời giải chính xác nhận được bởi việc "tích phân trực tiếp" các phương trình này và cho thỏa mãn các điều kiện biên dường như gặp phải khó khăn về toán học rất lớn. Đến nay cũng chỉ có được một số bài toán với dạng hình học, tải trọng và điều kiện biên đơn giản nào đó mới có lời giải chính xác dạng tường minh. Bởi vậy các phương pháp giải gần đúng có ý nghĩa quan trọng để khắc phục những khó khăn này. Các phương pháp biến phân là những phương pháp gần đúng dựa trên cơ sở các nguyên lý biến phân. Phương pháp Rayleigh – Ritz là một trong những phương pháp biến phân dựa trên nguyên lý thế năng toàn phần dừng (nguyên lý Lagrange).

Nội dung nguyên lý: trong tất cả các trường hợp khả dĩ động (tức thỏa mãn các điều kiện tương thích và điều kiện biên động học) thì trường chuyển vị thực (tương ứng với sự cân bằng của vật thể) sẽ làm cho thế năng toàn phần đạt giá trị dừng. Tức là:

$$\delta\mathbf{\Pi} = \delta(\mathbf{U} - \mathbf{A}) = 0$$

Nói cách khác, theo nguyên lý này thì trường chuyển vị khả dĩ động (liên tục và thỏa mãn điều kiện biên) và làm thế năng toàn phần Π cực trị sẽ chính là trường chuyển vị thực và thỏa mãn các phương trình cân bằng.

1.15.1. Vận dụng pp Rayleigh – Ritz vào giải bài toán tấm chịu uốn:

Theo phương pháp này, hàm độ võng $w(x,y)$ được biểu diễn gần đúng như tổ hợp tuyến tính của các hàm $w_i(x,y)$

$$w(x,y) = \sum^n C_i w_i(x,y) = C_1 w_1 + C_2 w_2 + \ldots + C_n w_n \qquad (1.29)$$

trong đó: $w_i(x,y)$ là các hàm khả dĩ động (liên tục & thỏa mãn điều kiện biên của bài toán) và được cho trước.

C_i là các tham số và sẽ được xác định từ điều kiện cực trị của hàm thế năng toàn phần Π.

Sau khi thay $w(x,y)$ vào biểu thức thế năng toàn phần Π và thực hiện tích phân ta được Π là hàm của các tham số C_i.

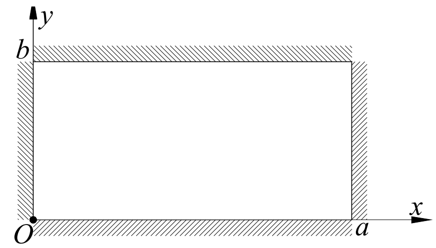
$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Từ điều kiện cực trị của Π ta có một hệ phương trình đại số tuyến tính:

$$\delta\mathbf{\Pi} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial C_i} = 0 \text{ với i=1, 2, 3, ..., n} \qquad (1.30)$$

Giải hệ phương trình này, ta được các C_i (i=1, 2, 3, ..., n).

1.15.2. Bài toán tấm chữ nhật biên ngàm chịu tải trọng phân bố đều:



Chọn hàm $w(x,y)$:

$$w(x,y)=\sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}C_{mn}\left(1-\cos\frac{2m\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2n\pi y}{b}\right) \quad (a)$$

Hàm w_{mn} có dạng:

$$w_{mn}=\left(1-\cos\frac{2m\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2n\pi y}{b}\right) \quad (b)$$

Thỏa điều kiện biên:

$$\begin{cases} w_{mn}=0\ \&\ \dfrac{\partial w_{mn}}{\partial x}=0 & \text{tại } x=0 \text{ và } x=a \\ w_{mn}=0\ \&\ \dfrac{\partial w_{mn}}{\partial y}=0 & \text{tại } y=0 \text{ và } y=b \end{cases}$$

Thay (a) vào biểu thức U:

$$U=\frac{D}{2}\int_F\left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y^2}\right)^2 dxdy$$

$$=\frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left\{\sum_{m=1}^{m}\sum_{n=1}^{n}4\pi^2C_{mn}\left[\frac{m^2}{a^2}\cos\frac{2m\pi x}{a}\left(1-\cos\frac{2m\pi_y}{b}\right)+\frac{n^2}{b^2}\cos\frac{2n\pi y}{b}\left(1-\cos\frac{2m\pi x}{a}\right)\right]\right\}^2 dxdy$$

$$U=2D\pi^4ab\left\{\sum_{m=1}^{m}\sum_{n=1}^{n}\left[3\left(\frac{m^4}{a^4}\right)+3\left(\frac{n^4}{b^4}\right)+2\left(\frac{m^4}{a^4}\right)\left(\frac{n^2}{b^2}\right)\right]C_{mn}^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{m}\sum_{n=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}2\left(\frac{m^4}{a^4}\right)C_{mr}C_{ms}+\sum_{r=1}^{r}\sum_{s=1}^{s}\sum_{n=1}^{n}2\left(\frac{n^4}{b^4}\right)C_{rn}C_{rs}\right\} \quad (c)$$

Thay (a) vào biểu thức tìm công A:

$$A=\int_0^a\int_0^b pwdxdy \quad (d)$$

$$=p\int_0^a\int_0^b\left[\sum_m\sum_n C_{mn}\left(1-\cos\frac{2m\pi_x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2n\pi_y}{b}\right)\right]dxdy$$

$$=qab\sum_n\sum_n C_{mn}$$

Vậy ta tìm được: $\Pi=U-A=\Pi\left(C_{11},C_{12},C_{13},...,C_{21},C_{22},C_{23},...,C_{mn}\right)$

Xác định hệ số C_{mn} từ điều kiện:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Pi}}{\partial C_{mn}}=0 \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,... \\ n=1,2,... \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$4D\pi^4ab\left\{\left[3\left(\frac{m^4}{a^4}\right)+3\left(\frac{n^4}{b^4}\right)+2\left(\frac{m^2}{a^2}\right)\left(\frac{n^2}{b^2}\right)\right]C_{mn}+\sum_{\substack{r=1\\(r\neq n)}}^{n}2\left(\frac{m^4}{a^4}\right)C_{mr}+\sum_{\substack{r=1\\(r\neq m)}}^{m}2\left(\frac{n^4}{b^4}\right)C_{rn}\right\}-pab=0 \quad (e)$$

$$\left[3m^4+3n^4\left(\frac{a}{b}\right)^4+2m^2n^2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]C_{mn}+\sum_{\substack{r=1\\(r\neq n)}}^{n}2m^4C_{mr}+\sum_{\substack{r=1\\(r\neq m)}}^{m}2n^4\left(\frac{a}{b}\right)^4C_{rn}=\frac{pa^4}{4D\pi^4} \qquad \text{(f)}$$

Với 1 vài giá trị của m & n, từ (f) cho ta 1 hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định các tham số C_{mn}.

Ví dụ: nếu chỉ lấy một tham số (m=n=1) thì điều kiện (f) cụ thể sẽ là 1 phương trình để tìm C_{11}.

$$\left[3+3\left(\frac{a}{b}\right)^4+2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]C_{11}=\frac{pa^4}{4D\pi^4}$$

Vậy: $C_{11}=\dfrac{pa^4}{4D\pi^4}.\dfrac{1}{3+3\left(\frac{a}{b}\right)^4+2\left(\frac{a}{b}\right)^2}$

Với trường hợp tấm vuông cạnh a thì: $C_{11}=\dfrac{pa^4}{32D\pi^4}$

Hàm độ võng: $w(x,y)=\dfrac{pa^4}{32D\pi^4}\left(1-\cos\dfrac{2m\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\dfrac{2n\pi y}{b}\right)$

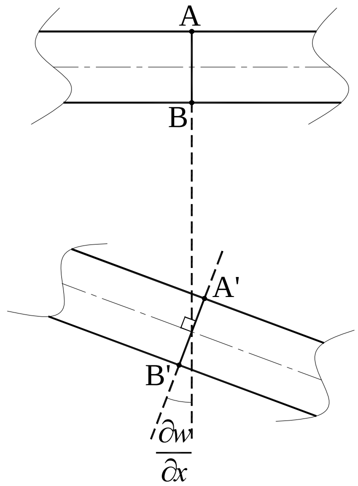
Với ν=0,3 thì: $w_{\max}=w\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)=0,014\dfrac{pa^4}{Eh^3}$ (chỉ lớn hơn 1,5% so với kết quả được tính khá dài dòng bởi Evans là $w_{\max}=0,0138\dfrac{pa^4}{Eh^3}$)

- Nếu lấy m=1, 2 và n=1, 2 thì ta có 4 phương trình đại số tuyến tính tìm 4 tham số C_{11}, C_{12}, C_{21} & C_{22}.

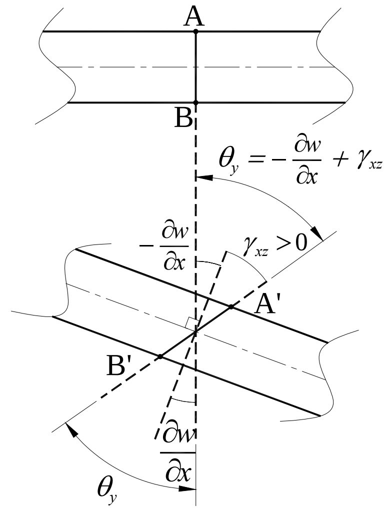
1.16. Giới thiệu về lý thuyết tấm dày MINDLIN – REISSNER:

Trong lý thuyết tấm mỏng, với những giả thiết Kirchhoff, các biến dạng trượt γ_{zx} và γ_{zy} là bằng 0. Tuy nhiên, cũng như lý thuyết dầm chịu uốn ngang phẳng, khi tỉ số $\dfrac{h}{a}$ (a là kích thước nhỏ nhất của mặt trung bình tấm) là không đủ nhỏ thì sự bỏ qua các biến dạng này sẽ là không đầy đủ và không thể bỏ qua.

Đầu tiên, Reissner xem rằng các góc xoay của các đoạn thẳng vuông góc mặt trung bình trong các mặt phẳng *xz* và *yz*, cùng với hàm độ võng được xem như những biến độc lập trong lý thuyết toán. Nhưng sau đó, Mindlin đã đơn giản hóa giả thiết này và xem rằng các đoạn thẳng pháp tuyến này trước và sau biến dạng còn là thẳng nhưng sau biến dạng tuy còn thẳng nhưng không còn vuông góc với mặt trung bình của tấm. Ngoài ra, ứng suất pháp σ_z (vuông góc với mặt trung bình) vẫn xem như bỏ qua và bằng 0 (như giả thiết Kirchhoff).



Mô hình Kirchhoff



Mô hình Mindlin - Reissner

Theo giả thiết Mindlin – Reissner chuyển vị của tấm có thể biểu diễn bởi:

$$\begin{cases} u = z.\theta_x \\ v = -z.\theta_y \\ w = w(x,y) \end{cases} \tag{1.31}$$

Quan hệ giữa các momen nội lực với biến dạng được viết trong dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{1.32}$$

Còn các biến dạng trượt:

$$\begin{cases} \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{zy} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \tag{1.33}$$

Các ứng suất:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{1.34}$$

Nếu xem các ứng suất này là phân bố bậc 2 thì có thể thấy:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \dfrac{3}{2h}\left(1 - \dfrac{4z^2}{h^2}\right) Q_x \\ \tau_{yz} = \dfrac{3}{2h}\left(1 - \dfrac{4z^2}{h^2}\right) Q_y \end{cases} \tag{1.35}$$

Và các thành phần nội lực trong tấm có dạng:

$$\begin{cases} M_x = D\left(\dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial \theta_y}{\partial y}\right) \\ M_y = D\left(\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x}\right) \\ M_{xy} = D(1-\nu)\left(\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_x = KGh\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right) \\ Q_y = KGh\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \theta_y\right) \end{cases} \tag{1.36}$$

trong đó: G là momen đàn hồi trượt, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

K là hệ số điều chỉnh, $K = 5/6$

Bằng việc sử dụng các phương trình cân bằng như trong lý thuyết Kirchhoff:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_x}{\partial x} + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \\ \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \\ \dfrac{\partial Q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \end{cases}$$

Phương trình vi phân chủ đạo của lý thuyết tấm dày mindlin – Reissner có thể được viết ở dạng sau:

$$\begin{cases} D\left(\dfrac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \dfrac{1-\nu}{2}.\dfrac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \dfrac{1+\nu}{2}.\dfrac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y}\right) - G\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right) = 0 \\ D\left(\dfrac{1+\nu}{2}.\dfrac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + \dfrac{1-\nu}{2}.\dfrac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2}\right) - G\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \theta_y\right) = 0 \\ G\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial y}\right) + p = 0 \end{cases} \tag{1.37}$$

<u>Các điều kiện biên:</u>

Dạng tổng quát ở mỗi cạnh biên tấm:

- Dạng động học: $w = \overline{w}$, $\theta_n = \overline{\theta_n}$, $\theta_t = \overline{\theta_t}$
- Dạng tĩnh học: $M_n = \overline{M_n}$, $M_{nt} = \overline{M_{nt}}$, $Q_n = \overline{Q_n}$

Cụ thể:
- Cạnh biên ngàm: $w = 0$, $\theta_n = 0$, $\theta_t = 0$
- Cạnh biên tự do: $Q_n = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$
- Cạnh tựa tự do: $w = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$
- Cạnh tựa cố định: $w = 0$, $M_n = 0$, $\theta_t = 0$

Thế năng toàn phần:

$$\begin{aligned} \Pi = &\frac{1}{2}\int_F \left[M_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + M_{xy}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) + M_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right] dxdy \\ &+ \int_F \left[Q_x\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right) + Q_y\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y\right)\right] dxdy - \int_F wp_z dxdy - \int_S \left[\left(\overline{Q_n} w + \overline{M_n}\theta_n + \overline{M_{nt}}\theta_{nt}\right)\right] dS \end{aligned} \tag{1.38}$$

Ở đây, w, θ_x và θ_y xem như các biến độc lập. Khi $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ thì biểu thức trên trở về dạng như tấm mỏng (theo giả thiết của Kirchhoff).

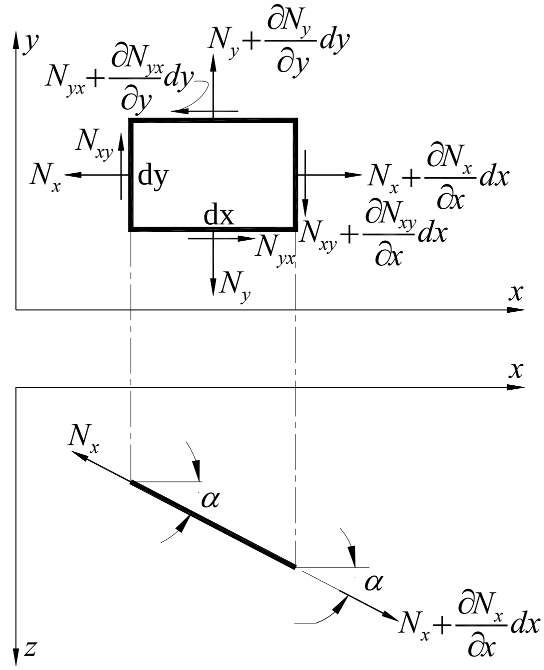
1.17. Tấm bị uốn do tác dụng đồng thời của tải trọng ngang và lực trong mặt phẳng tấm:

Như đã biết trong giáo trình lý thuyết đàn hồi, dưới tác dụng của tải trọng song song mặt phẳng tấm, trong tấm chỉ tồn tại các lực màng (các lực song song mặt phẳng tấm): N_x, N_y và N_{xy}. Khi tấm chịu cả tải trọng ngang thì tấm bị võng. Nếu độ võng là nhỏ thì có thể xem 2 loại tải trọng này gây ra các hiệu ứng độc lập nhau và khi này, bài toán có thể tách thành 2 bài toán độc lập và kết quả là việc cộng tác dụng một cách đơn giản.

Tuy nhiên, khi độ võng không là bé thì rõ ràng các lực màng cũng làm việc uốn tấm bởi tải trọng ngang bị ảnh hưởng, phương trình vi phân chủ đạo của bài toán cũng khác đi khi kể tới hiệu ứng này của các lực màng.

Ta giả thiết rằng độ võng w vẫn còn đủ nhỏ để các giả thiết Kirchhoff còn đúng và đủ lớn để cho tích số của lực màng hay đạo hàm của nó với đạo hàm của w là có độ lớn cùng bậc với đạo hàm của lực cắt Q_x & Q_y. Với giả thiết này, ta sẽ thấy rằng các ứng suất do uốn, các momen và lực cắt vẫn còn được xác định bởi các công thức (1.6) và (1.9).

➢ Khảo sát sự cân bằng của 1 phân tố tấm có diện tích $dxdy$ với chú ý là các nội lực do uốn sẽ không có mặt trong các phương trình hình chiếu lên phương x, y nên ta chỉ cần xét đối với các lực màng như hình vẽ.



• Xét tổng hình chiếu của các lực lên phương x:

+ Với cặp lực $N_x dy$ & $\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy$ thì hình chiếu lên phương x sẽ là:

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy\cos\alpha' - N_x dy\cos\alpha \approx \frac{\partial N_x}{\partial x}dxdy$$

(Vì α và α' nhỏ nên $\cos\alpha \approx 1$, $\cos\alpha' \approx 1$ bởi:

•• $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha + ... = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + ...$

•• α nhỏ nên $\alpha^2/2$ là VCB bậc cao nên $\cos\alpha \approx 1$)

+ Tương tự với cặp lực: $N_{yx}dx$ & $\left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y}dy\right)dx$ có hình chiếu lên phương x là: $\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}dxdy$

Vậy tổng hình chiếu các lực lên phương x là bằng 0 và ta có:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \qquad \text{(a)}$$

➢ Tương tự, từ $\Sigma Y=0$ có: $\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$ (b)

Bây giờ xét tổng hình chiếu các lực lên phương z:

+ Hình chiếu lên phương z do các cặp lực $N_x dy \,\&\, \left(N_x + \dfrac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy$ sẽ là:

$$-N_x dy\sin\alpha + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy\sin\alpha' \qquad \text{(c)}$$

Vì α nhỏ nên $\sin\alpha \approx \alpha = \dfrac{\partial w}{\partial x}$

Vì $\alpha' = \alpha + \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}dx$ cũng là nhỏ nên: $\sin\alpha' \approx \alpha' = \alpha + \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}dx = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$

Vậy biểu thức (c) sẽ là:

$$-N_x dy\frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\right) = N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdy + \frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dxdy$$

(Ở đây, các VBC bậc cao được bỏ qua)

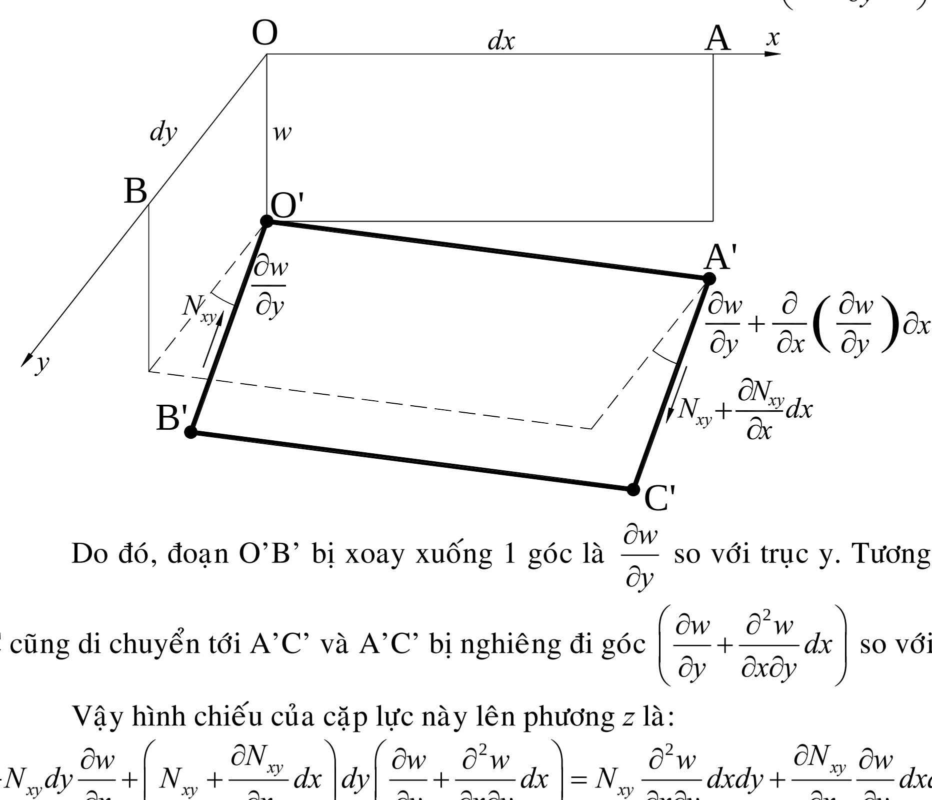
+ Tương tự, hình chiếu lên phương z của cặp lực $N_y dx \,\&\, \left(N_y + \dfrac{\partial N_y}{\partial y}dy\right)dx$ là:

$$N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dxdy + \frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}dxdy$$

+ Tìm hình chiếu lên phương z của cặp lực $N_{xy} dy \,\&\, \left(N_{xy} + \dfrac{\partial N_{xy}}{\partial x}dx\right)dy$

Xét hình vẽ dưới ta nhận thấy rằng: Do uốn, điểm O có độ võng $w \rightarrow$ O'

Điểm B có độ võng $\left(w + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy\right) \rightarrow$ B'



Do đó, đoạn O'B' bị xoay xuống 1 góc là $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ so với trục y. Tương tự vậy thì đoạn AC cũng di chuyển tới A'C' và A'C' bị nghiêng đi góc $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dx\right)$ so với trục y.

Vậy hình chiếu của cặp lực này lên phương z là:

$$-N_{xy}dy\frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}dx\right)dy\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dx\right) = N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}dxdy$$

(Ở đây, ta cũng bỏ qua VBC bậc cao $\dfrac{\partial N_{xy}}{\partial x}dx^2dy$)

+ Tương tự, với cặp lực $N_{yx}dx \,\&\left(N_{yx}+\dfrac{\partial N_{yx}}{\partial y}dy\right)dx$ có hình chiếu lên phương z

$$N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial N_{yx}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dxdy$$

+ Hình chiếu của lực cắt trên các cạnh phân tố và lực phần bố p đã biết ở mục 1.4 trước đây:

Vậy từ ΣZ=0, ta có phương trình:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+p+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y}=0 \qquad \text{(d)}$$

Thay (a) và (b) vào (d) ta thấy 2 số hạng cuối là bằng 0. Vì các ứng suất do lực song song mặt phẳng tấm là phân bố đều theo chiều dày tấm nên không gây ra momen trên mép phần tử đang xét nên các phương trình tổng momen cũng giống ở 1.4. Và cũng bởi vậy bằng các quan hệ này và làm tương tự, cuối cùng phương trình cân bằng hình chiếu theo phương z có dạng:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{1}{D}\left(p+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)} \qquad (1.39)$$

Đây là phương trình vi phân chủ đạo của tấm mỏng dưới tác dụng đồng thời của tải trọng ngang và tải trọng trong mặt phẳng tấm.

<u>Thí dụ:</u> Xét tấm chữ nhật biên tựa dưới tác dụng đồng thời của lực ngang phân bố đều và chịu kéo đều bởi N_x=const. Khi đó, ta có: $N_x=\text{const}, N_y=N_{xy}=0$. Sử dụng hàm độ võng $w(x,y)$ như ở mục 1.7 (dạng nghiệm Navier).

$$w(x,y)=\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,...}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Tải trọng p được khia triển dạng chuỗi Furier:

$$p=\frac{16p_0}{\pi^2}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{m.n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Đưa vào phương trình vi phân tấm:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{16p_0}{\pi^2}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{m.n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Cuối cùng ta tìm được:

$$\begin{cases} A_{mn}=\dfrac{16p_0}{D\pi^6 mn\left[\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{N_x m^2}{D\pi^2 a^2}\right]} & \text{với } m,n \text{ lẻ} \\ A_{mn}=0 & \text{với } m,n \text{ chẵn} \end{cases}$$

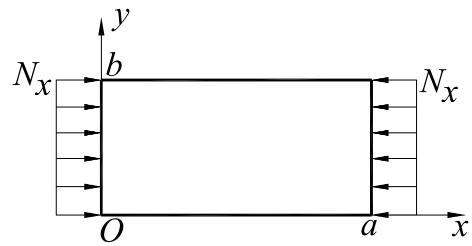
Vậy: $$w(x,y)=\frac{16p_0}{D\pi^6}\sum_{m=1,3,5,...}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{mn\left[\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{N_x m^2}{D\pi^2 a^2}\right]}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (1.40)$$

Dễ thấy rằng: Nếu $N_x>0$ (kéo) thì độ võng giảm

Nếu $N_x<0$ (nén) thì độ võng tăng

1.18. Ổn định của tấm chữ nhật biên tựa chịu nén đều:

Cũng như các bài toán Euler về ổn định của 1 thanh chịu nén, tấm mỏng khi chịu nén còn là phẳng và trạng thái cân bằng là ổn định khi N_x còn nhỏ hơn một giá trị tới hạn nào đó, nhưng khi N_x vượt quá giới hạn này thì trạng thái cân bằng phẳnng của tấm là không ổn định. Khi mất ổn định tấm bị cong đi.



Xét tấm chữ nhật tựa 4 cạnh chịu nén đều bởi N_x=const, $N_y=N_{xy}=p=0$.

Do tấm bị cong , sử dụng phương trình vi phân chủ đạo (1.39) với chú ý là thay N_x bởi $-N_x$, ta có:

$$D\nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{a}$$

Để các điều kiện biên được thỏa mãn, ta lấy:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{b}$$

Sau khi thay biểu thức hàm độ võng *w* dạng (b) vào (a), ta có:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[D\pi^4\left(\frac{m^4}{a^4}+\frac{n^4}{b^4}\right)^2 - N_x\pi^2\frac{m^2}{a^2}\right]A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = 0 \tag{c}$$

Phương trình (c) thỏa mãn với mọi (x,y) $\in F$ và không nhận nghiệm tầm thường (w=0) khi và chỉ khi:

$$D\pi^4\left(\frac{m^4}{a^4}+\frac{n^4}{b^4}\right)^2 - N_x\pi^2\frac{m^2}{a^2} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \text{với } \forall m = 1,2,... \\ n = 1,2,... \end{pmatrix} \tag{d}$$

Hay: $$N_x = \frac{D\pi^2\left(\frac{m^4}{a^4}+\frac{n^4}{b^4}\right)^2}{\frac{m^2}{a^2}} = \frac{D\pi^2}{b^2}\left(\frac{mb}{a}+\frac{n^2 a}{mb}\right)^2 \tag{1.41}$$

Điều này có ý nghĩa là khi N_x đạt đến giá trị xác định bởi (1.41) thì A_{mn} và do đó là cả độ võng *w* là khác 0, tức là tấ,m đã mất ổn định.

• Giá trị (1.41) cũng có thể đạt được bằng cách xét kỹ (1.40) ở bài trên. Khi đó, do lực nén N_x nên cần thay giá trị của N_x trong (1.40) bằng $-N_x$. Khi N_x đạt đến giá trị cho bởi (1.41) thì mẫu số của số hạng trong (1.40) là bằng 0 và nếu p_0 là khác 0 thì *w* trở thành không xác định. Ý nghĩa vật lý của điều này là với tải trọng ngang rất nhỏ nào đó thì tấm cũng sẽ có độ võng lớn. Hay nói cách khác trấm đã bị mất ổn định.

Từ (1.41) ta sẽ thấy rằng giá trị của N_x là nhỏ nhất nếu n=1. Điều này chỉ ra rằng: khi tấm mất ổn định, có thể xuất hiện vài nửa sóng theo phương tấm chịu nén nhưng chỉ có dạng ½ sóng theo phương vuông góc còn lại. Do đó, tải trọng tới hạn có giá trị là:

$$N_x^{cr} = \frac{D\pi^2}{b^2}\left(\frac{mb}{a}+\frac{a}{mb}\right)^2 = k\frac{D\pi^2}{b^2} \tag{1.42}$$

trong đó: $k = \left(\frac{mb}{a}+\frac{a}{mb}\right)^2$ là hệ số và giá trị của nó phụ thuộc vào m và tỷ số a/b.

Giá trị cực trị của N_x^{cr} xẩy ra khi:

$$\frac{dN_x^{cr}}{d\left(\frac{mb}{a}\right)}=\frac{2D\pi^2}{b^2}\left(\frac{mb}{a}+\frac{a}{mb}\right)\left[1-\frac{1}{\left(\frac{mb}{a}\right)^2}\right]=0$$

tức là khi $\frac{mb}{a}=1$ (e)

Thay (e) vào biểu thức *k* và dễ thấy rằng *k*=4

Vậy giá trị nhỏ nhất của N_x^{cr} là: $\left(N_x^{cr}\right)_{\min}=\frac{4D\pi^2}{b^2}$ (1.43)

Vì *m* chỉ nhận giá trị nguyên nên:

+ Nếu tấm là vuông $a/b=1$ thì m=1. Dạng mất ổn định có dạng nửa sóng hình sin trong cả 2 phương.

+ Nếu tấm là hình chữ nhật $a/b=2$ thì m=2. Theo phương nén, tấm bị cong dạng 2 nửa sóng hình sin.

Nếu tỉ số b/a không nguyên, do *m* là nguyên nên giá trị tải trọng tới hạn sẽ lớn hơn giá trị cho bởi (1.43). Khi đó, giá trị lực tới hạn được xác định theo (1.42) là:

$$N_x^{cr}=k\frac{D\pi^2}{b^2} \tag{f}$$

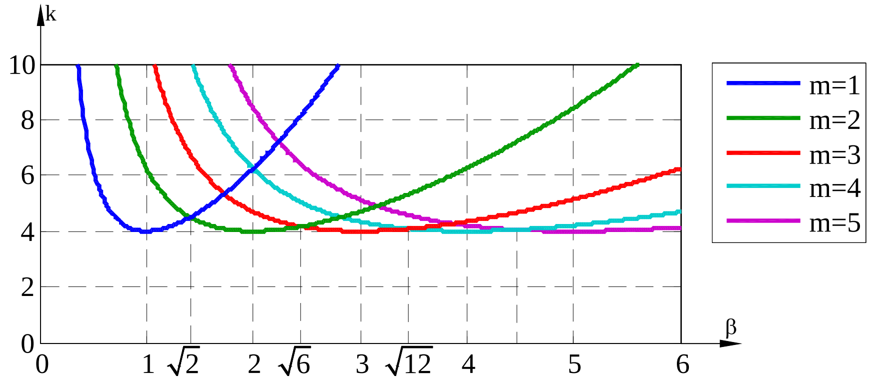
với $k=\left(\frac{mb}{a}+\frac{a}{mb}\right)^2$

Hay: $k=\left[\frac{m}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}+\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{m}\right]^2=\left(\frac{m}{\beta}+\frac{\beta}{m}\right)^2=\frac{1}{\beta^2}\left(m+\frac{\beta^2}{m}\right)^2$

Hay: $k=\frac{1}{\beta^2}\left(m^2+2\beta^2+\frac{\beta^4}{m^2}\right)$ (g)

với $\beta=\frac{a}{b}$

Lần lượt thay các giá trị nguyên khác nhau của m, ta vẽ được các độ thị quan hệ giữa k và β (từ (g)) như hình sau. Rõ ràng với mỗi giá trị của m ta có một đường cong $k(\beta)$. Tại chỗ giao của 2 đường cong có giá trị m và (m+1) rõ ràng xác định giá trị β mà ứng với giá trị này tấm sẽ bị cong dạng m hay (m+1) nửa sóng sin theo phương bị nén. Bởi vậy ứng với các giá trị β khác nhau thì giá trị k trên đồ thị là đường bao dưới cùng.



Bây giờ ta sẽ xác định các giá trị của β (tức tỉ số a/b) tương ứng khi đang mất ổng định của tấm từ m nửa sóng hình sin sang (m+1) nửa sóng hình sin (ví dụ tại điểm A của đồ thị). Tại điểm này, rõ ràng k có thể xác định ứng với giá trị m và cũng huộc đường cong ứng với giá trị (m+1). Vậy ta có:

$$\frac{1}{\beta^2}\left(m^2+2\beta^2+\frac{\beta^4}{m^2}\right)=\frac{1}{\beta^2}\left[(m+1)^2+2\beta^2+\frac{\beta^4}{(m+1)^2}\right]$$

Sau khi đơn giản, ta có:

$$\beta^4=m^2(m+1)^2$$

Hay $\beta=\sqrt{m(m+1)}$

Vậy:

+ Nếu $\beta=\dfrac{a}{b}<\sqrt{2}=1,41$ thì dạng mất ổn định theo phương nén tấm là nửa sóng sin.

+ Nếu $\sqrt{2}<\beta<\sqrt{6}=2,45$ thì dạng mất ổn định theo phương nén tấm là 2 nửa sóng sin.

+ Nếu $\sqrt{6}<\beta<\sqrt{12}=3,46$ thì dạng mất ổn định theo phương nén tấm là 3 nửa sóng sin.

Trong tính toán thực tế, để đơn giản, đối với tấm có tỷ số $\beta=\dfrac{a}{b}>0,7$ thì người ta lấy luôn k=4. Khi đó, sai số lớn nhất đối với việc xác định giá trị tải trọng tớii hạn là 13% (và xẩy ra trong khoảng $0,7<\beta<\sqrt{2}$).

<u>Giới hạn sử dụng công thức (1.42) và (1.43):</u>

Vì trong các công thức này chứa mođun đàn hồi E nên rõ ràng vật liệu vẫn làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Khi đó, dưới tác dụng của lực nén N_x^{cr}, ứng suất trong tấm là:

$$\sigma^{cr}=\frac{N_x^{cr}}{h}=k\frac{D\pi^2}{b^2h}$$

với k=4 thì: $\sigma^{cr}=4\dfrac{\pi^2Eh^3}{12(1-\nu^2)b^2h}=\dfrac{\pi^2E}{3(1-\nu^2)}\left(\dfrac{h}{b}\right)^2\le\sigma_{ch}$

Từ đó, ta có: $\dfrac{h}{b}\le\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{3\sigma_{ch}}{E}(1-\nu^2)}$

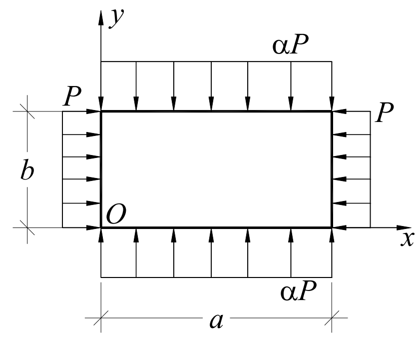
Thí dụ với thép thường: $\sigma_{ch}=200\,{}^{MN}\!/_{m^2}$

$E=2.10^5\,{}^{MN}\!/_{m^2};\nu=0,3$

Ta có: $\frac{h}{b} \le \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3.200}{2.10^5}\left(1-0,3^2\right)} = \frac{1}{60}$

Vậy, với tấm bằng thép thường thì các công thức xác định tải trọng tới hạn (1.42) & (1.43) được dùng khi $\frac{h}{b} \le \frac{1}{60}$

1.19. Tấm chữ nhật biên tựa, chịu nén 2 phương:



Xét tấm chịu nén theo 2 phương như hình vẽ. Có thể xem rằng nội lực trong tấm gồm:

$$N_x = -P, N_y = -\alpha P, N_{xy} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Khi mất ổn định, tấm bị võng, phương trình vi phân của mặt trung bình tấm (theo công thức (1.39)) lúc này có dạng:

$$D\nabla^4 w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Hay: $$D\nabla^4 w = -P\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(b)}$$

Hàm độ võng được viết trong dạng:

$$w = C\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \text{(c)}$$

(Dễ thấy rằng (c) thỏa mãn các điều kiện biên tấm).

Thay hàm độ võng (c) vào phương trình vi phân (b), ta nhận được:

$$\pi^4 CD\left(\frac{m^4}{a^4} + 2\frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = \pi^2 CP\left(\frac{m^2}{a^2} + \alpha\frac{n^2}{b^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Từ đó, ta dễ dàng tìm được giá trị của lực P mà nó có thể giữ cho tấm bị cong:

$$P = D\pi^2 \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \alpha\frac{n^2}{b^2}\right)}$$

Hay ở dạng sau: $$P = \frac{D\pi^2}{b^2}\frac{b^2}{a^2}\frac{\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}{\left(m^2 + \alpha\frac{a^2}{b^2}n^2\right)}$$

Đặt $\beta = a/b$ thì: $$P = k_1\frac{D\pi^2}{b^2} \qquad \text{(d)}$$

trong đó: $$k_1 = \frac{\left(m^2 + \beta^2 n^2\right)^2}{\beta^2\left(m^2 + \alpha\beta^2 n^2\right)} \qquad \text{(e)}$$

Giá trị tới hạn của lực P tương ứng giá trị nhỏ nhất của hệ số k_1, tức là:

$$P_{th} = \left(k_1\right)_{\min}\frac{D\pi^2}{b^2} \qquad \text{(f)}$$

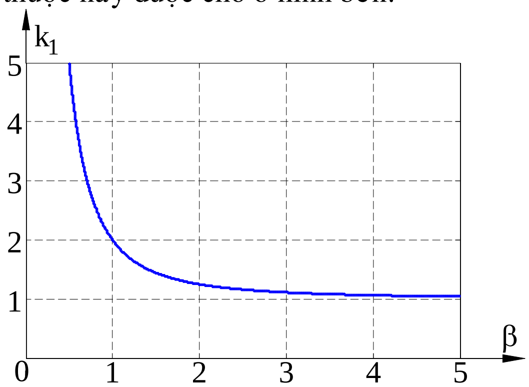
Và giá trị của ứng suất tới hạn là: $\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{h} = \left(k_1\right)_{\min}\frac{D\pi^2}{b^2 h}$

Trường hợp tấm bị nén đều theo 2 phương (tức α=1) thì:

$$k_1 = \frac{m^2 + \beta^2 n^2}{\beta^2} \tag{g}$$

Dễ thấy là khi m=n=1 thì sẽ cho các giá trị k_1 nhỏ nhất, lúc đó:

$\left(k_1\right)_{\min} = \dfrac{1+\beta^2}{\beta^2}$ chỉ phụ thuộc vào β (tức vào tỷ số giữa chiều dài a/b). Sự phụ thuộc này được cho ở hình bên:



Với tấm vuông: $\beta = 1 \Rightarrow \left(k_1\right)_{\min} = 2$ và giá trị tới hạn:

$$P_{th} = \frac{2D\pi^2}{b^2}$$

(nhỏ hơn 2 lần so với nén tấm theo 2 phương)

Vì $\left(k_1\right)_{\min} \to 1$ nên khi β□ thì lực tới hạn tiến tới giá trị:

$$P_{th} = \frac{D\pi^2}{b^2}$$

1.20. Tấm dị hướng chịu uốn:

1.20.1. Phương trình vi phân tấm:

Giả sử về phương diện tính đàn hồi, vật liệu tấm có 3 mặt phẳng đối xứng vuông góc với nhau hay thường gọi là vật liệu trực hướng. Nếu đó là các mặt phẳng tọa độ thì với trạng thái ứng suất của tấm (xem rằng σ_z=0 và τ_{xz}=τ_{yz}=0) thì quan hệ giữa ứng suất – biến dạng được biểu diễn tuyến tính qua 4 hằng số đàn hồi độc lập (thay vì là 9 trong trường hợp vật liệu trực hướng tổng quát).

Cụ thể:
$$\begin{cases} \sigma_x = E'_x \varepsilon_x + E''.\varepsilon_y \\ \sigma_y = E'_y \varepsilon_y + E''.\varepsilon_x \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \tag{a}$$

Giả thiết tấm vẫn tuân theo các giả thiết Kirchhoff, ta vẫn có:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{b}$$

Thay (b) vào (a), ta có:

$$\begin{cases} \sigma_x = -z\left(E'_x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E''\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_y = -z\left(E'_y\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E''\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ \tau_{xy} = -2Gz\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{c}$$

Và dễ thấy rằng, các biểu thức của nội lực (momen uốn và xoắn):

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x.z.dz = -\left(D_x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y.z.dz = -\left(D_y \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}.z.dz = -2D_{xy} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{1.44}$$

trong đó: $D_x = \dfrac{E'_x.h^3}{12}; D_y = \dfrac{E'_y.h^3}{12}; D_1 = \dfrac{E''.h^3}{12}; D_{xy} = \dfrac{G.h^3}{12}$ (d)

Khảo sát sự cân bằng của phân tố tấm (dx,dy) chịu tải phân bố p như mục 1.4. Khi thay các biểu thức momen của (1.44) vào, ta sẽ nhận được phương trình vi phân của tấm dị hướng (trực hướng) như sau:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\left(D_1 + 2D_{xy}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p$$

$$Hay: \boxed{D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p} \quad \text{với:} H = D_1 + 2D_{xy} \tag{1.45}$$

Cũng tương tự như tấm đẳng hướng, ta tìm được lực cắt theo hàm độ võng w như sau:

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Trường hợp đặc biệt, nếu tấm là đẳng hướng, chỉ còn 2 hằng số đàn hồi độc lập, ta có:

$$E'_x = E'_y = \frac{E}{1-\nu^2}; E'' = \frac{\nu E}{1-\nu^2}; G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Và suy ra: $\begin{cases} D_x = D_y = \dfrac{E.h^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \\ H = D_1 + D_{xy} = \dfrac{h^3}{12}\left(\dfrac{\nu E}{1-\nu^2} + \dfrac{E}{1+\nu} \right) = \dfrac{E.h^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \end{cases}$

Phương trình vi phân (1.45) trở về dạng đã biết: $D\nabla^4 w = p$

Phương trình vi phân (1.45) để nghiên cứu tấm làm bằng vật liệu trực hướng và cả tấm bằng vật liệu không đồng chất như bê tông cốt thép có độ cứng chống uốn khác nhau theo 2 phương vuông góc.

1.20.2. Xác định độ cứng trong các trường hợp riêng:

<u>1) Tấm bê tông cốt thép:</u>

Gọi E_S và E_C lần lượt là mođun đàn hồi của thép và bê tông, $n = \dfrac{E_S}{E_C}; \nu_C$ là hệ số poatxong của bê tông và từ trên có thể nhận được gần đúng: $\nu_C = \dfrac{E''}{\sqrt{E'_x E'_y}}$.

Với tấm có cốt thép được đặt giao nhau theo 2 phương *x, y* ta có thể lấy (theo Hubc):

$$D_x = \frac{E_C}{1-\nu_C^2}\left[I_{Cx} + (n-1)I_{Sx}\right]$$

$$D_y = \frac{E_C}{1-\nu_C^2}\left[I_{Cy} + (n-1)I_{Sy}\right]$$

$$D_1 = \nu_C\sqrt{D_x D_y}; D_{xy} = \frac{1-\nu_C}{2}\sqrt{D_x D_y}$$

$\Rightarrow$ và $H = \sqrt{D_x D_y}$

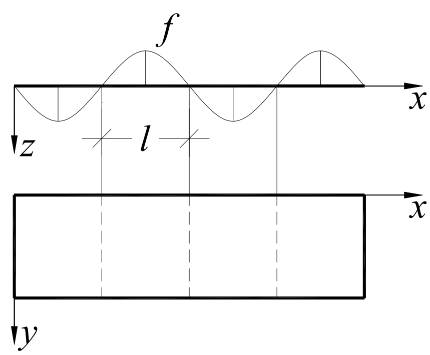
trong đó: I_{Cx}, I_{Sx} là momen quán tính của vật liệu tấm (bê tông) và của cốt thép đối với trục trung hòa tại mặt cắt *x=const*.

I_{Cy}, I_{Sy} là các trị số tương ứng tại mặt cắt *y=const*.

Khi đó, phương trình vi phân có dạng:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{D_x D_y}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p$$

2) ***Tấm dạng gợn sóng:*** Dạng sóng: $z = f\sin\frac{\pi x}{l}$

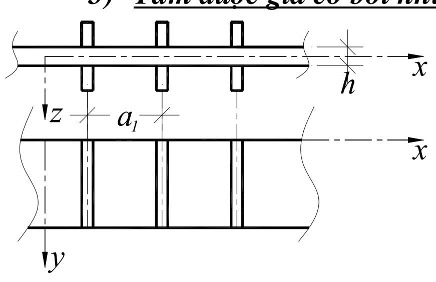


E, ν là hằng số đàn hồi của vật liệu.
h là chiều dày tấm, s là chiều dài cung ½ sóng.
Khi đó, theo Scydel:

$$\begin{cases} D_x = \frac{l}{s}\cdot\frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}; D_y = EI \\ D_1 = 0; H = 2D_{xy} = \frac{s}{l}\cdot\frac{E.h^3}{12(1+\nu)} \end{cases}$$

trong đó, lấy gần đúng: $s = l\left(1+\frac{\pi^2 f^2}{4l^2}\right); I = \frac{f^2 h}{2}\left[1 - \frac{0,81}{1+2,5\left(\frac{f}{2l}\right)^2}\right]$

3) ***Tấm được gia cố bởi những gờ cứng cách đều nhau theo 1 phương***:



Theo Hoppman, Huffingfon, Magress:

$$\begin{cases} D_x = H = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} \\ D_y = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'.I}{a_1} \end{cases}$$

với: *E, ν* là các hằng số đàn hồi vật liệu tấm.
E' là momen đàn hồi vật liệu gờ cứng.
I là momen quán tính của gờ cứng đối với trục đối xứng trên mặt cắt ngang tấm.

4) ***Tấm được gia cố bởi 2 hệ thống gờ vuông góc nhau (mỗi hệ là các gờ cứng cách đều nhau):***

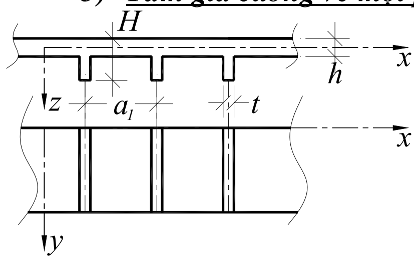
Cũng như trên: $D_x = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'.I_1}{b_1}; D_y = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'.I_2}{a_1}; H = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$

trong đó: I_1 là momen quán tính của gờ cứng theo phương *x* lấy với trục *y*.

b_1 là khoảng cách giữa các gờ theo phương trục y.

I_2, a_1 là các trị số tương ứng với các gờ gia cố theo phương y.

5) Tấm gia cường về một phía bởi các gờ cứng cách đều nhau:



Gần đúng: I là momen quán tính chính của mặt cắt chữ T có cánh rộng a_1 và $\alpha=h/H$, thì ta có:

$$D_x = \frac{Ea_1h^3}{12\left(a_1 - t + \alpha^3 t\right)}; D_y = \frac{E.I}{a_1}; D_1 = 0; D_{xy} = D'_{xy} + \frac{c}{2a_1}$$

trong đó: D'_{xy} là độ cứng xoắn tấm khi chưa có gờ.

C là độ cứng chống xoắn của 1 gờ.

2. LÝ THUYẾT VỎ:

2.1. Một số khái niệm của lý thuyết mặt cong:

2.1.1. Phương trình mặt cong:

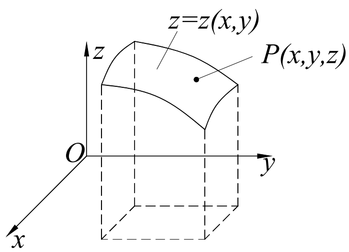
Phương trình 1 mặt cong có thể cho trong các dạng sau (trong hệ tọa độ vuông góc):

+ Dạng không tường minh: F(x,y,z)=0

+ Dạng tường minh: z=z(x,y)

+ Dạng tham số: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

Trường hợp thông thường, trong thực tế, ta xét 1 mặt cong trong hệ tọa độ vuông góc và được xác định bởi phương trình: $z = z(x,y)$



Tại điểm *P* bất kỳ thuộc mặt cong, các đạo hàm bậc I và bậc II của hàm mặt cong có ý nghĩa quan trọng trong việc lý thuyết mặt cong. Theo cách ký hiệu Euler chúng sẽ là:

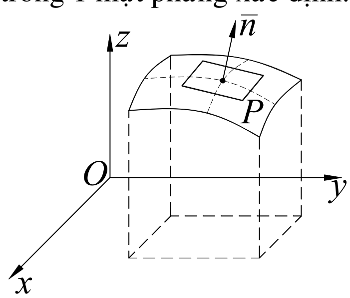
$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = Z_x \\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = Z_y \end{cases}$$

Và các đạo hàm bậc II là:

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = Z_{xx} \\ s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = Z_{xy} \\ t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = Z_{yy} \end{cases}$$

2.1.2. Mặt phẳng tiếp xúc và pháp tuyến mặt cong:

Các tiếp tuyến của các đường cong đi qua điểm *P* bất kỳ thuộc mặt cong sẽ đều nằm trong 1 mặt phẳng xác định. Đó là mặt tiếp xúc của mặt cong tại điểm *P*.



Phương trình của mặt tiếp xúc này là:

$$-p(\xi - x) - q(\eta - y) + \zeta - z = 0$$

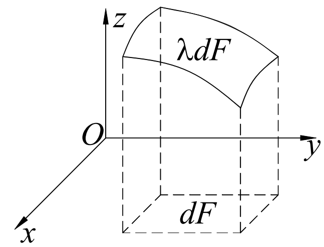
trong đó: *x, y, z* là tọa độ của điểm *P* thuộc mặt cong.

ξ, η, ζ là tọa độ điểm bất kỳ của mặt phẳng tiếp xúc.

Pháp tuyến mặt cong tại điểm *P* là pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong đi qua *P*.

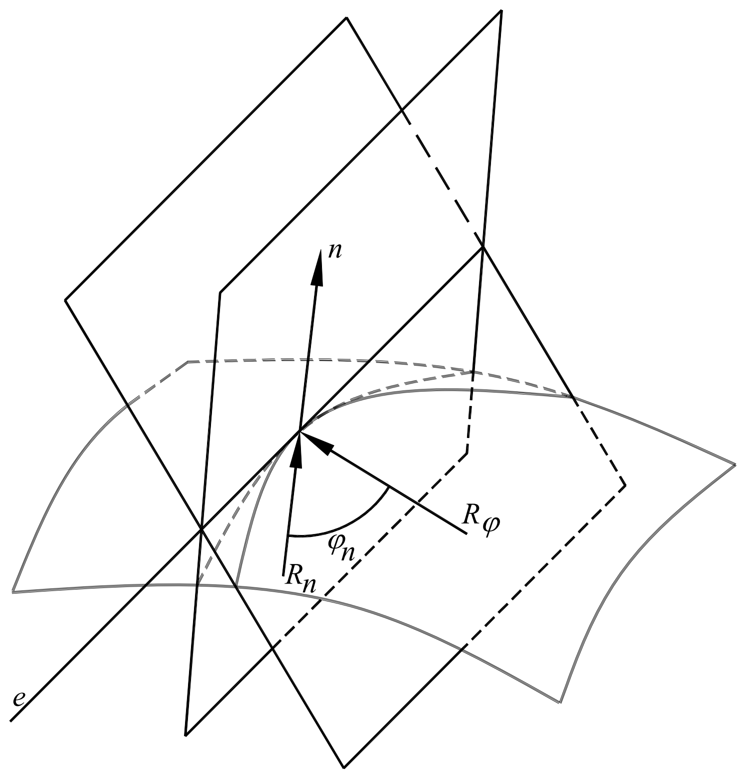
Cosin chỉ phương của vectơ pháp tuyến này:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\overline{n}^x}{|\overline{n}|} = \dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{\overline{n}^y}{|\overline{n}|} = \dfrac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{\overline{n}^z}{|\overline{n}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{cases}$$



$\lambda = \sqrt{1+p^2+q^2}$: độ đo của mặt cong

2.1.3. Các thiết tuyến và bán kính cong của chúng:



Cho điểm P bất kỳ thuộc mặt cong và tiếp tuyến e qua P. Giả sử tiếp tuyến e có cosin chỉ phương là (a,b,c). Xét 1 mặt phẳng bất kỳ chứa tiếp tuyến e. Giao tuyến của mặt phẳng này với mặt cong là 1 đường cong phẳng được gọi là thiết tuyến nghiêng. Độ cong tại P của đường cong phẳng này là:

$$G_\varphi = \frac{1}{R_\varphi} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\cos\varphi\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

trong đó: φ là góc nghiêng tạo bởi pháp tuyến mặt cong n và pháp tuyến của đường cong (thiết tuyến nghiêng) đang xét cũng tại P.

Trong vô số mặt phẳng chứa thiết tuyến e có 1 mặt phẳng vừa chứa e và vừa chứa cả pháp tuyến n của mặt cong. Giao tuyến của mặt phẳng này với mặt cong cho ta thiết tuyến thẳng góc (hay thiết tuyến pháp).

Bán kính cong của thiết tuyến thẳng góc và các thiết tuyến nghiêng có quan hệ với nhau theo định lý Meusnier như sau:

$$R_\varphi = R_n \cos\varphi$$

trong đó: R_φ là bán kính cong của thiết tuyến nghiêng.
R_n là bán kính cong của thiết tuyến thẳng góc.
φ là góc nghiêng giữa các mặt phẳng của 2 thiết tuyến này.

2.1.4. Bán kính cong của thiết tuyến thẳng góc:

Ứng với một tiếp tuyến e cho trước, rõ ràng tồn tại thiết tuyến thẳng góc có bán kính cong được tính qua công thức:

$$G_n = \frac{1}{R_n} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \text{(trong trường hợp này } \varphi=0 \Rightarrow \cos\varphi=1\text{)}$$

Như vậy, khi thiết tuyến e quay xung quanh pháp tuyến n của mặt cong tại P (tức là khi mặt phẳng của thiết tuyến quay xung quanh pháp tuyến n) thì ta nhận được các giá trị khác nhau của bán kính cong của các thiết tuyến thẳng góc. Quỹ tích của giá trị các bán kính cong này là một đường cong bậc II (đường cong Depin) mà đường cong này sẽ là:

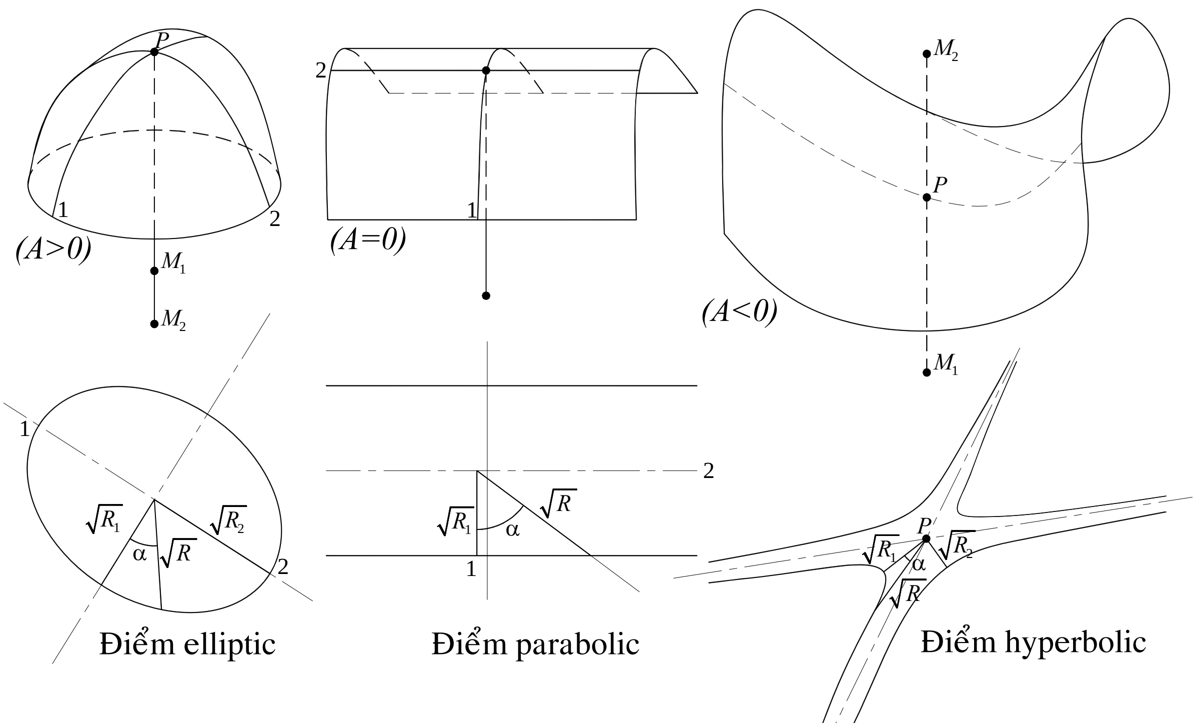
+ 1 đường Ellip khi P là 1 điểm elliptic.

+ 1 đường Hyperbol khi P là 1 điểm hyperpolic.

+ 1 đường Parabol khi P là 1 điểm parabolic.

Tức là tùy thuộc vào dấu của định thức:

$$A = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2$$



Các đường cong Dupin luôn tồn tại 2 trục chính mà tương ứng với chúng là 1 phương của các tiếp tuyến ứng với thiết tuyến thẳng góc có bán kính cong đạt giá trị max và min. Các thiết tuyến này được gọi là các thiết tuyến chính. Các mặt phẳng của 2 thiết tuyến chính vuông góc nhau. Giá trị bán kính tương ứng của các thiết tuyến chính được gọi là bán kính cong chính, ký hiệu là R_1, R_2.

Nếu biết các giá trị bán kính cong chính R_1, R_2 thì có thể tìm được giá trị bán kính cong của thiết tuyến thẳng góc R_α nếu biết góc nghiêng α giữa mặt phẳng đang xét và mặt phẳng chứa thiết tuyến chính.

+ Trường hợp các điểm là elliptic và hyperbolic thì: $\dfrac{1}{R_\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha}{R_1} + \dfrac{\sin^2\alpha}{R_2}$

+ Trường hợp các điểm Parabolic thì: $\dfrac{1}{R_\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha}{R_1}$

<u>Chú ý:</u> • Xuất phát từ công thức xác định bán kính cong của các thiết tuyến thẳng góc người ta đưa ra công thức xác định các bán kính cong chính và từ đó cả công thức xác định cosin chỉ phương của tiếp tuyến mặt cong tương ứng các thiết tuyến chính.

• Ngoài ra, liên quan tới bán kính cong chính này, người ta còn đưa ra các khái niệm sau:

+ Độ cong trung bình: $G_{tb} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) = \dfrac{\left(1+q^2\right)r - 2pqs + \left(1+p^2\right)t}{2\left(1+p^2+q^2\right)^{3/2}}$

+ Độ cong Gauss: $G_G = \frac{1}{R_1}.\frac{1}{R_2} = \frac{rt - s^2}{\left(1 + p^2 + q^2\right)^2}$

Và độ cong Gauss sẽ xác định đặc tính của điểm đang khảo sát là:

++ Điểm elliptic nếu $G_G>0$

++ Điểm hyperbolic nếu $G_G<0$

++ Điểm parabolic nếu $G_G=0$

2.1.5. Các đường độ cong: (Lines of curvature)

• Các đường độ cong là các đường cong trên mặt cong mà tại mọi điểm của nó đường cong này tiếp xúc với 1 thiết tuyến chính.

• Người ta cũng đã chỉ ra rằng: là mọi điểm trên mặt cong luôn có 2 đường độ cong đi qua và chúng vuông góc nhau.

Ví dụ: Trên mặt cầu, các đường kinh tuyến và vĩ tuyến là các đường độ cong và ta luôn luôn chỉ ra được 2 đường kinh tuyến và vĩ tuyến vuông góc nhau đi qua 1 điểm cho trước nào đó.

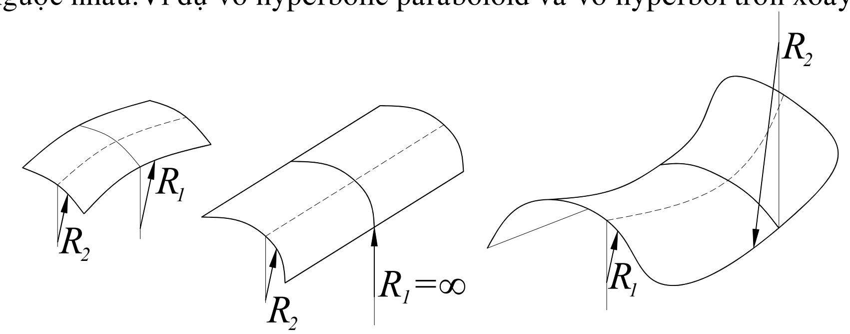
2.1.6. Phân loại kết cấu vỏ:

Thường sử dụng độ cong Gauss để phân loại kết cấu vỏ:

1) Vỏ có độ cong Gauss dương ($G_G>0$) xem như được hình thành bởi 2 trục đường cong cùng hướng. Ví dụ các mài vòm cầu (spherical domes), các vỏ elliptic paraboloid.

2) Vỏ có độ cong Gauss bằng 0 ($G_G=0$) được hình thành bởi 1 họ đường cong. Ví dụ các vỏ trụ, vỏ hình côn.

3) Vỏ có độ cong Gauss âm ($G_G<0$) được hình thành bởi 2 họ đường cong có hướng ngược nhau.Ví dụ vỏ hyperbolic paraboloid và vỏ hyperbol tròn xoay.



Quan trọng rằng: hiệu ứng biên ảnh hưởng là rất khác nhau đến các dạng vỏ này.

+ Ở loại vỏ có độ cong Gauss dương, ảnh hưởng của biên có xu hướng giảm rất nhanh.

+ Ở loại vỏ có độ cong Gauss âm, ảnh hưởng của biên lan rất rộng trong phạm vi vỏ.

2.2. Lý thuyết vỏ màng (vỏ phi momen):

2.2.1. Các giả thiết cơ bản trong lý thuyết vỏ màng:

Trong lý thuyết vỏ phi momen, người ta thừa nhận các giả thiết sau:

• Vật liệu vỏ là đẳng hướng và tuân theo địnhluật Hooke.

• Bề dày vỏ là nhỏ sao cho độ cứng uốn bỏ qua được hay nói cách khác là ta bỏ qua các momen uốn xuất hiện trong vỏ.

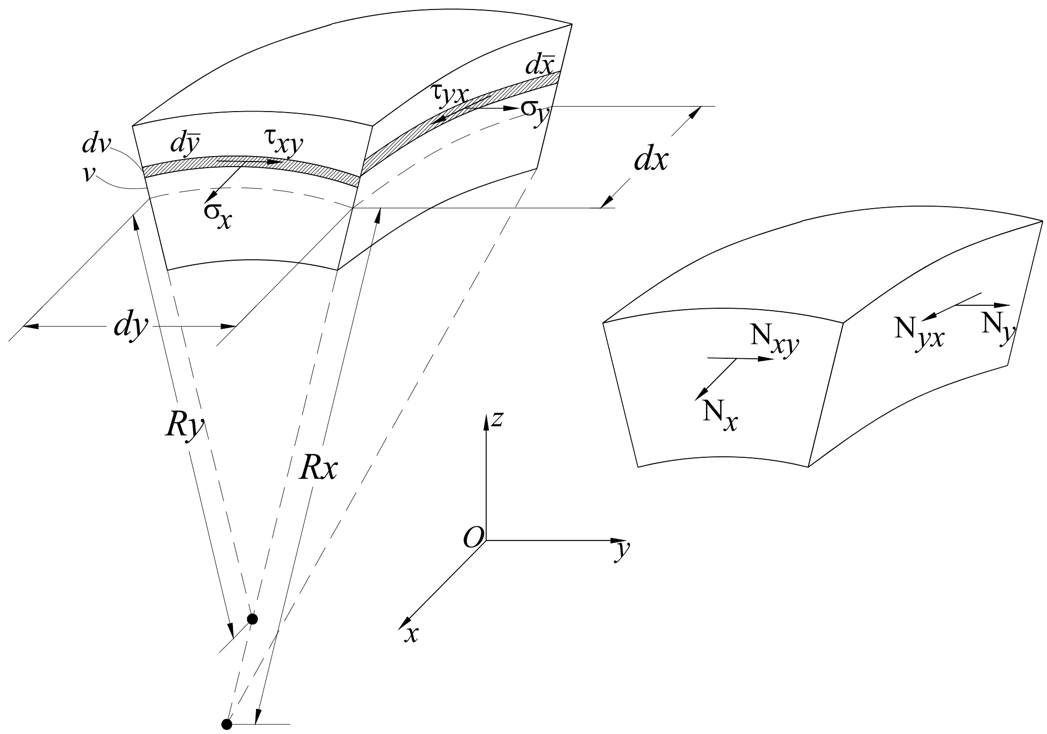
• Các ứng suất trong vỏ là phân bố đều theo chiều dày vỏ và hợp lực của chúng là các nội lực màng sẽ nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt trung gian của vỏ tại điểm khảo sát.

• Dọc theo biên vỏ, các phản lực cũng có phương tiếp tuyến với mặt trong không gian vỏ.

• Các biến dạng do lực màng sinh ra không bị cản trở.

Tất nhiên trong thực tế, khó có thể đảm bảo tất cả các điều kiện này được thực hiện, do đó lý thuyết màng chỉ mô tả một hệ nội lực với mức độ chính xác có giới hạn (đặc biệt tại vùng biên vỏ).

Xét vỏ có độ dày không đổi *h*. Lấy ra 1 phân tố có hình chiếu lên mặt phẳng *Oxy* là chữ nhật *dxdy*. Các thiết tuyến thuộc các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ *Oxz* và *Oyz* có các bán kính cong là R_y và R_x.



Qua hình trên, dễ thấy rằng:

$$\frac{d\bar{y}}{dy} = \frac{R_y + v}{R_y} \quad \text{và} \quad \frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{R_x + v}{R_x}$$

Trên các mặt cắt này có các ứng suất $\sigma_x, \sigma_y \;\&\; \tau_{xy}, \tau_{yx}$ mà hợp lực của chúng là:

$$N_x = \frac{1}{dy}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x.dv.d\bar{y} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x.\left(1 + \frac{v}{R_y}\right).dv$$

Theo giả thiết trên, các ứng suất trong vỏ là phân bố đều theo chiều dày vỏ nên:

$$N_x = \sigma_x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{v}{R_y}\right).dv = \sigma_x \left[v + \frac{v^2}{2R_y}\right]\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \sigma_x.h$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{cases} N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y.\left(1+\dfrac{v}{R_x}\right).dv = \sigma_y.h \\ N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}.\left(1+\dfrac{v}{R_y}\right).dv = \tau_{xy}.h \\ N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx}.\left(1+\dfrac{v}{R_x}\right).dv = \tau_{yx}.h \end{cases} \tag{2.1}$$

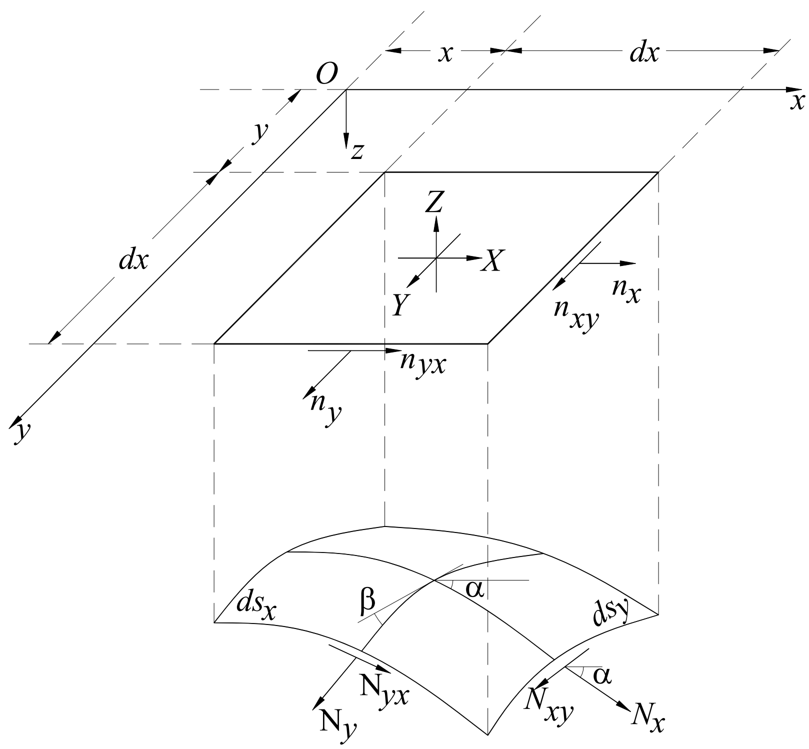
Và theo luật đối ứng của ứng suất tiếp $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ thì $N_{xy}=N_{yx}$. Như vậy, theo các giả thiết thì trên 1 mặt cắt bất kỳ của mặt trung gian, các lực màng gồm lực pháp và lực tiếp sẽ tồn tại và nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt trung gian.

2.2.2. Lý thuyết màng trong hệ tọa độ vuông góc:

2.2.2.1. Hình chiếu nội lực hay nội lực quy chiếu:

Như đã biết ở trên, trong quá trình nghiên cứu trạng thái màng của vỏ thay vì tìm các ứng suất thành phần ta có thể tìm các nội lực thành phần, cụ thể:

$N_x = h.\sigma_x, N_y = h.\sigma_y \ \& \ N_{xy} = N_{yx} = h.\tau_{xy}$



Việc lựa chọn hệ vuông góc, tọa độ hay hệ tọa độ tự nhiên để nghiên cứu nội lực trong vỏ tùy chọn vào việc làm đơn giản hay không quá trình nghiên cứu này. Ngoài ra, ta đưa vào các khái niệm nội lực quy chiếu (n_x, n_y, n_{xy}) là hình chiếu của nội lực thật (N_x, N_y, N_{xy}) lên mặt phẳng xOy và quan hệ giữa nội lực thực và hình chiếu của nó, tức nội lực quy chiếu có thấy như sau:

Nếu chú ý là: $\dfrac{dx}{ds_x} = \cos\alpha; \dfrac{dy}{ds_y} = \cos\beta$ thì dễ thấy rằng:

$$n_x = \frac{(N_x.ds_x)}{dy}\cos\alpha = N_x\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

Tương tự ta có: $\begin{cases} n_y = N_y.\cos\beta\dfrac{ds_x}{dx} = N_y\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} \\ n_{xy} = N_{xy}.\cos\beta\dfrac{ds_y}{dy} = N_{xy}\dfrac{\cos\beta}{\cos\beta} = N_{xy} \\ n_{yx} = N_{yx} = N_{xy} = n_{xy} \end{cases}$

Nếu mặt trung gian của vỏ có phương trình: $z = f\left(x, y\right)$ thì tang các góc nghiêng giữa các tiếp tuyến của các thiết tuyến song song với các mặt phẳng tọa độ *Oxz* và *Oyz* là:

$$\tan\alpha = \frac{\partial z}{\partial x} = p; \tan\beta = \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

và: $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$$

Vậy cuối cùng ta có thể có công thức quan hệ giữa nội lực và nội lực quy chiếu là:

$$\begin{cases} n_x = N_x \dfrac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} \\ n_y = N_y \dfrac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}} \\ n_{xy} = n_{yx} = N_{xy} = N_{yx} \end{cases}$$

2.2.2.2. Phương trình vi phân của vỏ màng – Hàm ứng suất:

Xét vỏ có phương trình mặt trung gian $z = f\left(x, y\right)$ chịu tải trọng mặt bất kỳ có 3 thành phần mà cường độ trên 1 đơn vị diện tích trong mặt phẳng xy là:

$$\begin{cases} X = X\left(x, y\right) \\ Y = Y\left(x, y\right) \\ Z = Z\left(x, y\right) \end{cases} \tag{2.3}$$

và được gọi là tải trọng quy chiếu.

Với phương trình tổng hình chiếu các lực lên trục Ox và trục Oy thì có thể thấy là dễ dàng nhận được bằng việc sử dụng hệ nội lực quy chiếu. Cu thể:

$$\Sigma X = \left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x}dx\right)dy - n_y dy + \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y}\right)dx - n_{yx}dx + Xdxdy = 0$$

Rút gọn lại ta được: $\dfrac{\partial n_x}{\partial x} + \dfrac{\partial n_{yx}}{\partial y} + X = 0$ (a)

Tương tự, từ điều kiện *ΣY=0*, ta có: $\dfrac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial n_y}{\partial y} + Y = 0$ (b)

Để xét tổng hình chiếu các lực lên phương z, ta chú ý rằng:

- Nếu trên cạnh trái của phân tố vỏ có N_x tác dụng lên cung ds_x thì phần chiếu lên trục *z* của N_x trên cạnh chiếu *dy* tương ứng sẽ là $n_x p$ (hình vẽ).
- Thật vậy, phần chiếu của N_x trên trục *z* phân bố trên *dy* sẽ là:

$$\frac{N_x ds_y \sin\alpha}{dy} = N_x \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = N_x \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = n_x \tan\alpha = n_x p$$

- Và khi đó, trên cạnh đối diện của phân tố vỏ có $\left(N_x + \partial N_x\right)$ với phần chiếu lên trục *z* trên cạnh *dy* tương ứng sẽ là: $n_x p + \dfrac{\partial\left(n_x p\right)}{\partial x}dx$
- Với cách suy luận tương tự ta có thể tìm được tất cả các phần chiếu lên trục *z* của tất cả các lực màng tác dụng trên các cạnh của phân tố đang xét có kể tới gia số của chúng thông qua các lực quy chiếu. Các thành phần chiếu này được biểu diễn trên hình vẽ.
- Đến đây, ta dễ thấy rằng:

$$\Sigma Z = \left[n_x p + \frac{\partial \left(n_x p \right)}{\partial x} dx \right] dy - n_x p dy + \left[n_y q + \frac{\partial \left(n_y q \right)}{\partial y} dy \right] dx - n_y q dx +$$

$$+ \left[n_{xy} q + \frac{\partial \left(n_{xy} q \right)}{\partial x} dx \right] dy - n_{xy} q dy + \left[n_{yx} p + \frac{\partial \left(n_{yx} p \right)}{\partial y} dy \right] dx - n_{yx} p dy + Z dx dy = 0$$

Sau khi đơn giản và chia 2 vế cho *dxdy*, ta có:

$$\frac{\partial \left(n_x p \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(n_y q \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(n_{xy} q \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(n_{yx} p \right)}{\partial y} + Z = 0 \qquad \text{(c)}$$

- Thực hiện phép đạo hàm, ví dụ (với việc sử dụng ký hiệu Euler: $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$)

$$\frac{\partial \left(n_x p \right)}{\partial x} = \frac{\partial n_x}{\partial x} p + n_x \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial n_x}{\partial x} p + n_x r$$

Thì phương trình hình chiếu lên phương *z* có dạng:

$$r.n_x + p\frac{\partial n_x}{\partial x} + t.n_y + q\frac{\partial n_y}{\partial y} + 2s.n_{xy} + q\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + p\frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + Z = 0$$

Sử dụng các phương trình tổng hình chiếu lên trục *x* & *y* đã có (phương trình (a) và (b)), ta sẽ nhận được phương trình tổng hình chiếu lên trục *z* (c) trong dạng:

$$r.n_x + 2s.n_{xy} + t.n_y + Z - pX - qY = 0$$

Bằng cách đưa vào hàm tải trọng *V* với: $V = Z - pX - qY$ (2.4)

Cuối cùng ta có phương trình:

$$r.n_x + 2s.n_{xy} + t.n_y = -V \qquad (2.5)$$

Ở phương trình này vẫn còn 3 ẩn, vì vậy, Pucher đã đưa vào 1 hàm mới gọi là hàm ứng suất *F*(*x*,*y*) nhằm qua đó có thể có 1 phương trình vi phân cấp 2 thay thế hệ 3 phương trình vi phân cân bằng trên. Theo Pucher, hàm ứng suất *F*(*x*,*y*) là hàm có quan hệ với các nội lực quy chiếu như sau:

$$\begin{cases} n_x = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \displaystyle\int X dx \\ n_y = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \displaystyle\int Y dy \\ n_{xy} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = n_{yx} \end{cases} \qquad (2.6)$$

Rõ ràng dễ thấy rằng; khi đó các phương trình vi phân cân bằng (a) và (c) được thỏa mãn, còn phương trình vi phân cân bằng theo trục *z* sẽ là:

$$r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2s\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -V + r\int X dx - t\int Y dy = -Q\left(x, y\right) \qquad (2.7)$$

trong đó: hàm *Q*(*x*,*y*) ở vế phải là xác định nếu tải trọng và mặt vỏ.

Trường hợp vỏ chỉ chịu tải trọng thẳng đứng, tức là khi: $\begin{cases} X = 0 \text{ và } Y = 0 \\ V = Z = g\left(x, y\right) \end{cases}$ thì phương trình vi phân vỏ màng sẽ đơn giản là:

$$r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-2s\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-Z=-g\left(x,y\right) \tag{2.8}$$

Hay như tài liệu có cách viết khác là:

$$z_{xx}F_{yy}-2z_{xy}F_{xy}+z_{yy}F_{xx}=-g\left(x,y\right) \tag{2.9}$$

trong đó các chỉ số *x, y* chỉ đạo hàm riêng theo *x* hay *y*.

Các phương trình (2.7) hoặc (2.8) là các phương trình vi phân hàm ứng suất của vỏ màng trong hệ tọa độ vuông góc. Các phương trình này cũng thường được gọi là các phương trình Pucher.

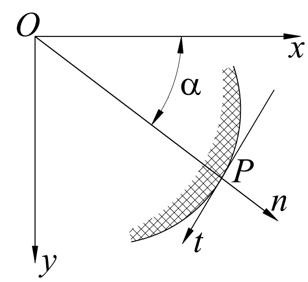
Nhận xét:

• Như vậy, trong hệ tọa độ vuông góc, phương trình vi phân vỏ màng là 1 phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 2. Trong phương trình chứa 3 hàm điều kiện trên 2 biên mà cụ thể là:

$$\begin{cases} z\left(x,y\right): \text{hàm bề mặt vỏ} \\ F\left(x,y\right): \text{hàm ứng suất} \\ Q\left(x,y\right): \text{hàm liên quan tải trọng và cả bề mặt vỏ} \end{cases}$$

2.2.2.3. Điều kiện biên:

• ***Trường hợp cạnh biên tự do***: dễ thấy là khi đó trên biên hay trên hình chiếu của nó lên mặt phẳng *Oxy* ta có:



$$n_n=\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0 \quad \text{và} \quad n_{nt}=-\frac{\partial^2 F}{\partial n\partial t}=0$$

Khi vỏ chỉ có 1 đoạn mép tư do thì điều kiện biên dẫn tới:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0\,\&\,\frac{\partial F}{\partial y}=0: \text{trên biên}$$

Vì việc thêm bớt vào hàm ứng suất *F*(*x*,*y*) các số hạng bậc nhất không ảnh hưởng tới nội lực màng nên từ đó ta có thể thấy các điều kiện biên trên tương đương với điều kiện:

$F = 0$: trên biên tự do

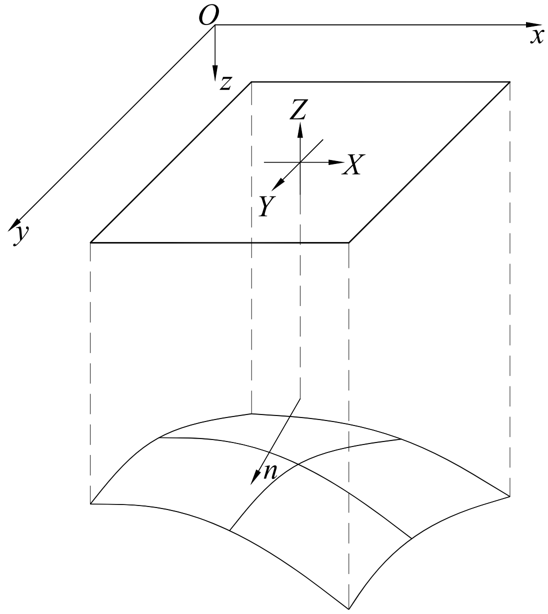
• ***Trường hợp biên tựa trên các liên kết nửa cứng***: (các dầm đỡ có độ cứng uốn nhỏ: các tường đỡ thẳng đứng) tùy thuộc sự làm việc cụ thể mà có các điều kiện biên cụ thể:

+ Trường hợp vỏ được đặt trên tường đỡ thẳng đứng sao cho phản lực ...... nối với tường đỡ tương ứng bằng 0 tại chu vi: thì cũng từ điều kiện:

$$n_n=\left.\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right|_{\text{biên}}=0\Rightarrow \text{cũng tương đương } F=0 \text{ trên biên}$$

• ***Trường hợp biên tựa cố định***: khi đó tồn tại 2 thành phần n_n và n_{xy} trên biên (ta sẽ xét sau trong các trường hợp kết cấu cụ thể và sẽ phải xét tới cả biến dạng).

2.2.2.4. Tải trọng của vỏ màng:



Nếu như trên đã nói, phương trình vi phân của vỏ màng trong hệ tọa độ vuông góc chứa 3 hàm tải trọng là 3 thành phần hình chiếu của tải trọng lên mặt phẳng nằm ngang *Oxy* trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng đó là: $X(x,y); Y(x,y) \& Z(x,y)$

Nếu gọi p_x, p_y, p_z là giá trị của tải trọng tác dụng lên 1 đơn vị diện tích bề mặt vỏ theo 3 trục tọa độ *x, y, z* thì giữa chúng và các thành phần *X, Y, Z* (trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng *Oxy*) có quan hệ sau:

$$\begin{cases} X = \lambda p_x \\ Y = \lambda p_y \\ Z = \lambda p_z \end{cases} \qquad (2.10)$$

trong đó: $\lambda = \sqrt{1+p^2+q^2}$: độ đo mặt cong, với $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}, q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

• Nếu trên vỏ chỉ có tải trọng vuông góc bề mặt vỏ tác dụng và có cường độ *n* thì 3 thành phần hình chiếu của nó lên 3 trục tọa độ là:

$$\begin{cases} p_x = -n\dfrac{p}{\lambda} & (vì\ p_x = n\cos\alpha) \\ p_y = -n\dfrac{q}{\lambda} & (vì\ p_y = n\cos\beta) \\ p_z = -n\dfrac{1}{\lambda} & (vì\ p_z = n\cos\gamma) \end{cases} \qquad (2.11)$$

và từ đó ta tìm được 3 thành phần tải trọng quy chiếu (trên 1 đơn vị mặt bằng *Oxy*) là:

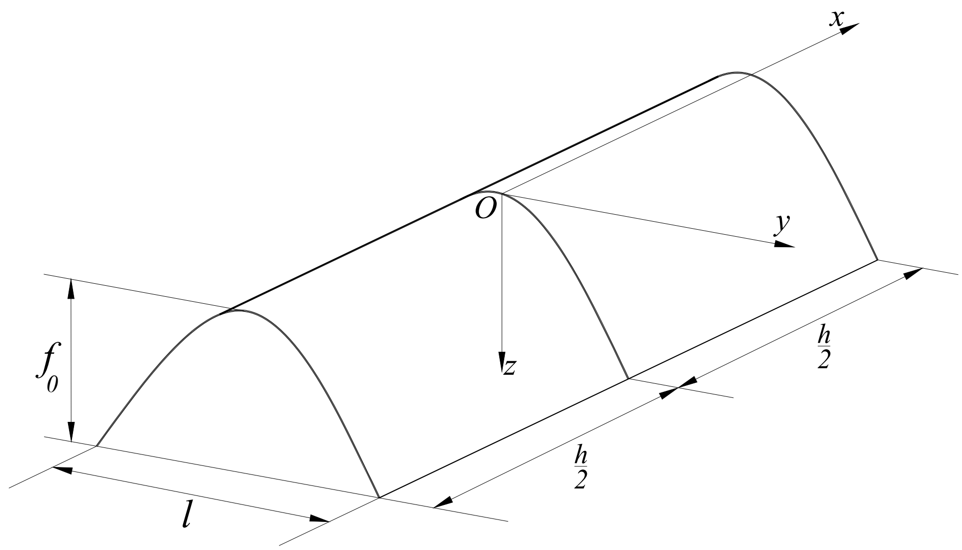
$$\begin{cases} X = \lambda p_x = -np \\ Y = \lambda p_y = -nq \\ Z = n \end{cases}$$

• Trường hợp tải trọng là trọng lượng bản thân có cường độ là g_b (trên 1 đơn vị diện tích mặt vỏ) thì ta hiểu là đã cho:

$$\begin{cases} p_x = 0 \\ p_y = 0 \\ p_z = g_b \end{cases} \quad \text{vậy} \quad \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = g_b\lambda = g \end{cases} \qquad (2.12)$$

2.2.3. Ứng dụng lý thuyết vỏ màng trong hệ tọa độ vuông góc: <u>VỎ HĂNG GA</u>

1) <u>Hăng ga với mặt cắt ngang bất kỳ</u>:



Khi đó phương trình là: $z=f(y)$, trong đó: $f(y)$ là hàm bất kỳ của y.

+ *Trước hết ta xét trường hợp vỏ chịu tải trọng thẳng đứng*. Khi đó: $z=g(y)$,

Phương trình vi phân của vỏ màng theo (2.8) là:

$$r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-2s\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-Z=-g\left(y\right) \qquad \text{(a)}$$

với: $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(y\right)=f''$ (để đơn giản, dấu $'$ để chỉ đạo hàm theo y)

Thay r, s, t vào phương trình vi phân vỏ màng, ta có: $f''=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-g\left(y\right)$

Hay: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{g\left(y\right)}{f''}=n_y$

Tích phân 2 lần $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$ theo biến x, ta được hàm F trong dạng:

$$F=-\frac{g\left(y\right)}{f''}\frac{x^2}{2}+C_1\left(y\right)x+C_2\left(y\right) \qquad \text{(b)}$$

các hằng số $C_1\left(y\right)\&C_2\left(y\right)$ được xác định theo điều kiện biên của bài toán.

Từ hàm ứng suất (b), ta cũng có:

$$n_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-\left(\frac{g\left(y\right)}{f''}\right)''\frac{x^2}{2}+C_1''\left(y\right)x+C_2''\left(y\right)$$

$$n_{xy}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{g\left(y\right)}{f''}\right)'x-C_1'\left(y\right)$$

Giả sử 2 mép đầu và cuối hăng ga là 2 sườn không có độ cứng uốn theo hướng x hay nói cách khác trên 2 mép vỏ là không có n_x, tức là: $n_x=0$ trên $x=\pm h/2$

Cụ thể hơn ta có:

$$n_x\Big|_{x=h/2}=0\Rightarrow -\left[\frac{g(y)}{f''}\right]''\frac{h^2}{8}+C_1''(y)\frac{h}{2}+C_2''(y)=0$$

$$n_x\Big|_{x=-h/2}=0\Rightarrow -\left[\frac{g(y)}{f''}\right]''\frac{h^2}{8}-C_1''(y)\frac{h}{2}+C_2''(y)=0$$

Từ đây suy ra: $\begin{cases} C_2''(y)=\left[\dfrac{g(y)}{f''}\right]''\dfrac{h^2}{8} \\ C_1''(y)=0 \end{cases}$

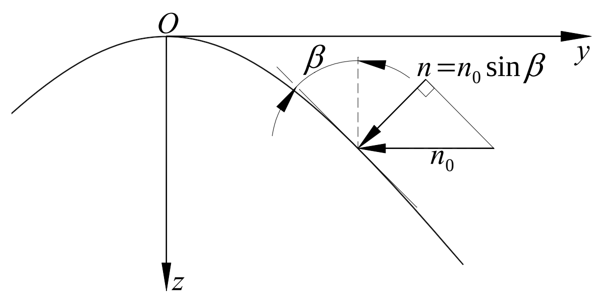
Vì $C_1''(y)=0$ nên $C_1'(y)=C=\text{const}$. Tuy nhiên, do tính chất đối xứng của bài toàn nên lực tiếp n_{xy} phải bằng 0 trên mặt cắt đối xứng x=0. Do vậy, ta lại có:

$n_{xy}\Big|_{x=0}=0,$ suy ra: $C_1'(y)=C=0$

Cuối cùng, ta lại có kết quả là các biểu thức cho các nội lực màng quy chiếu:

$$\begin{cases} n_y=-\dfrac{g(y)}{f''} \\ n_x=-\left[\dfrac{g(y)}{f''}\right]''\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{h^2}{8}\right) \\ n_{xy}=\left[\dfrac{g(y)}{f''}\right]' x \end{cases} \tag{2.13}$$

+ *Tương tự, ta cũng tìm được nội lực do tải trọng gió*: Xét trường hợp gói thổi theo phương y vào vỏ, khi đó thành phần theo phương x là không có. Cường độ tải trọng do gió theo phương y là n_0 (từ quy phạm). Vậy gió đã tác dụng một tải trọng vuông góc với mặt vỏ với cường độ: $n=n_0\sin\beta$ (xem hình vẽ).



Và theo (2.11) các thành phần tải trọng quy chiếu (trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng *Oxy*) là:

$$\begin{cases} X=0\ \left(\text{vì } q=\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\right) \\ Y=-nq=-n_0\sin\beta\tan\beta \\ Z=n=n_0\sin\beta \end{cases}$$

Phương trình vi phân hàm ứng suất (2.7) có dạng:

$$f''\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-V+f''\int Ydy$$

Theo (2.4): $V=Z-pX-qY=Z-f'Y$

Nên (2.7) đưa về dạng:

$$f''\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-Z+f'y+f''\int Ydy$$

Từ đó: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{f' y - Z}{f''} + \int Y dy$

Cuối cùng, theo (2.6) và sau khi kể tới điều kiện biên, ta có các biểu thức nội lực màng quy chiếu:

$$\begin{cases} n_y = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy = \dfrac{f' Y - Z}{f''} \\ n_{xy} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\left[\left(\dfrac{f' Y - Z}{f''}\right)' + Y\right] x \\ n_x = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx = \left[\left(\dfrac{f' Y - Z}{f''}\right)'' + \dfrac{dY}{dy}\right]\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{h^2}{8}\right) \end{cases} \tag{2.14}$$

2) Hăng ga với mặt parabol:

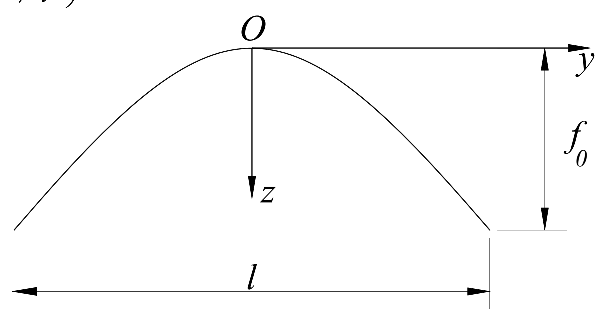
Ta có thể sử dụng các kết quả trên vào hăng ga có mặt cắt là parabol bậc 2.

Giả sử phương trình mặt cắt hăng ga được cho trong dạng:

$$z = \frac{c}{2} y^2 = \frac{4 f_0}{l^2} y^2 \qquad \left(\text{tức } c = {}^{8 f_0}\!/_{l^2}\right)$$

Có các đạo hàm:

$$\begin{cases} z' = \tan\beta = cy = \dfrac{8 f_0}{l^2} y \\ z'' = c = \dfrac{8 f_0}{l^2} \\ \lambda = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + c^2 y^2} \end{cases}$$



Ngoài ra, $\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + c^2 y^2}} \\ \sin\beta = \dfrac{\tan\beta}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}} = \dfrac{cy}{\sqrt{1 + c^2 y^2}} \end{cases}$

Vỏ chịu tải trọng bản thân:

Cường độ tải trọng bản thân (trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng *Oxy*):

$$g(y) = g_b \lambda = g_b \sqrt{1 + c^2 y^2} = \frac{g_b}{\cos\beta}$$

trong đó: g_b là trọng lượng trên 1 đơn vị diện tích bề mặt vỏ.

Sử dụng các kết quả ở phần ***1)*** trên ta được:

$$\begin{cases} n_y = -\dfrac{g(y)}{f''} = -\dfrac{g_b}{c}\sqrt{1 + c^2 y^2} = -\dfrac{g_b}{c.\cos\beta} \\ n_{xy} = -\left[\dfrac{g(y)}{f''}\right]''\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{h^2}{8}\right) = g_b \dfrac{cy}{\sqrt{1 + c^2 y^2}} x = g_b x \sin\beta \\ n_x = -\left[\dfrac{g(y)}{f''}\right]' x = -g_b \dfrac{c}{\sqrt{\left(1 + c^2 y^2\right)^3}}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{h^2}{8}\right) = -g_b c.\cos^3\beta\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{h^2}{8}\right) \end{cases}$$

Để tìm các nội lực màng, ta sử dụng công thức quan hệ giữa các lực màng và lực quy chiếu (8.2), ta nhận được:

$$\begin{cases} N_y = n_y \dfrac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} = n_y\sqrt{1+c^2y^2} = -\dfrac{g_b}{c}\left(1+c^2y^2\right) = -\dfrac{g_b}{c.\cos^2\beta} \\ N_{xy} = n_{xy} = g_b x\sin\beta \\ N_x = n_x \dfrac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}} = n_x \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2y^2}} = -g_b c.\cos^4\beta\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{h^2}{8}\right) \end{cases}$$

Vỏ chịu tải trọng gió: với hăng ga cao, tải trọng gió được xem là tải trọng phản xứng và vuông góc với mặt vỏ với cường độ $n = n_0\sin\beta$

Như trên mục ***1)*** đã bàn, các thành phần hình chiếu của tiếp tuyến gió trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng *Oxy* là:

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = -nq = -n_0\tan\beta\sin\beta \\ Z = n = n_0\sin\beta \end{cases}$$

Cũng từ các biểu thức nội lực quy chiếu ở ***1)*** , ta có trong trường hợp này:

$$n_y = -\frac{n_0}{c}\frac{\tan\beta}{\cos\beta} = -\frac{n_0 y}{\cos\beta}$$

$$n_{xy} = n_0\frac{1+2\sin^2\beta}{\cos\beta}x$$

$$n_x = n_0 c\sin\beta\left(3+2\cos^2\beta\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{h^2}{8}\right)$$

Từ đây, sử dụng (2.2) ta có các biểu thức tính nội lực màng tác dụng trong vỏ:

$$\begin{cases} N_y = -\dfrac{n_0 y}{\cos^2\beta} \\ N_{xy} = n_{xy} = n_0\dfrac{1+2\sin^2\beta}{\cos\beta} \\ N_x = n_0 c\sin\beta\cos\beta\left(3+2\cos^2\beta\right)\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{h^2}{8}\right) \end{cases}$$

Chú ý: • Các biểu thức xác định các lực màng của vỏ hăng ga có mặt cắt parabol cho các giá trị chính xác và thường không gặp khó khăn gì nhiều về phương diện toán học. Tuy nhiên nhớ là trong nhiều trường hợp do biểu thức của *g* là $g = g_b\sqrt{1+z'^2}$ nên việc tính toán thường không đơn giản. Khi đó, người ta có thể lấy gần đúng: $g = g_b\sqrt{1+z'^2} \approx g_b\left(1+\dfrac{1}{2}z^2\right)$ vì khai triển $\sqrt{1+z'^2} = 1+\dfrac{1}{2}z'^2-\dfrac{1}{8}z'^4+...$ được lấy 2 số hạng đầu. Ngoài ra, các lực màng nhận được từ tải trọng g gần đúng này là không lớn hơn giá trị bài toán với tải trọng thực tại mọi điểm trên vỏ. Do vậy, việc đơn giản hóa này thiên về an toàn.

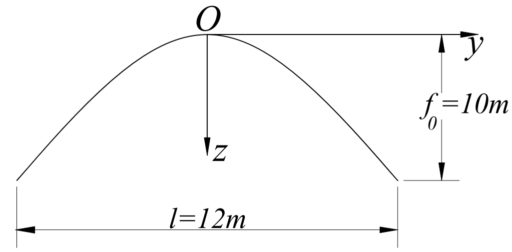
• Khi vỏ là thoải $\left(\dfrac{f_0}{l}\le\dfrac{1}{5}\right)$ thì bỏ qua tác dụng của gió lên vỏ.

Ví dụ tính toán: Tìm nội lực màng vỏ hăng ga có mặt cắt ngang là parabol bậc 2 (như hình vẽ) chịu tác dụng của trọng lượng bản thân và tải trọng gió. Các số liệu tải trọng là:

+ Trọng lượng 1 đơn vị diện tích vỏ: $g_b = 175 \,{}^{kg}\!/_{m^2}$

+ Áp lực gió: $n_0 = n_{\text{gió}} = 100 \,{}^{kg}\!/_{m^2}$.

+ Ngoài ra, $f_0 = 10^m; l = 12^m; h = 24^m$



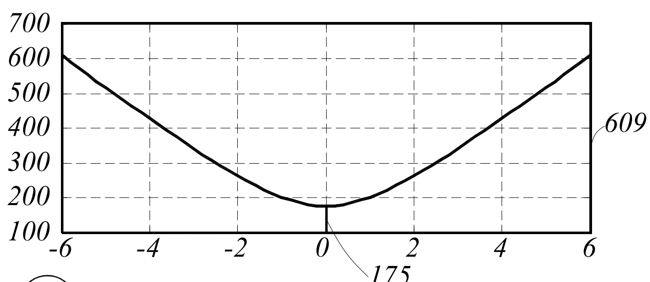
Giải: • Trước hết ta cần xác định các giá trị quy chiếu của các tải trọng trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng *Oxy*:

+ Với trọng lượng bản thân: $g = g_b\sqrt{1+\left(\frac{5}{9}y\right)^2}$ $\quad\left(c = \frac{8f_0}{l^2} = \frac{5}{9}\right)$

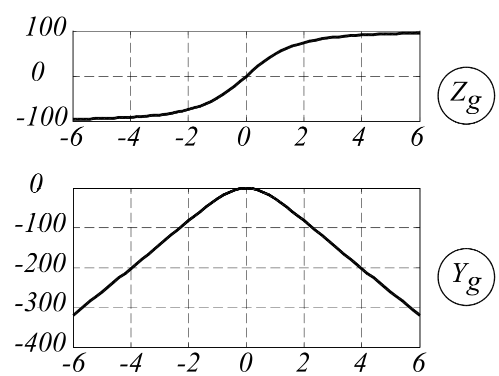
+ Với tải trọng gió: $\begin{cases} Z_g = n_g \sin\beta = n_g \dfrac{5}{9}\dfrac{y}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{9}y\right)^2}} \\ Y_g = -n_g\left(\dfrac{5}{9}y\right)^2 \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{9}y\right)^2}} \end{cases}$

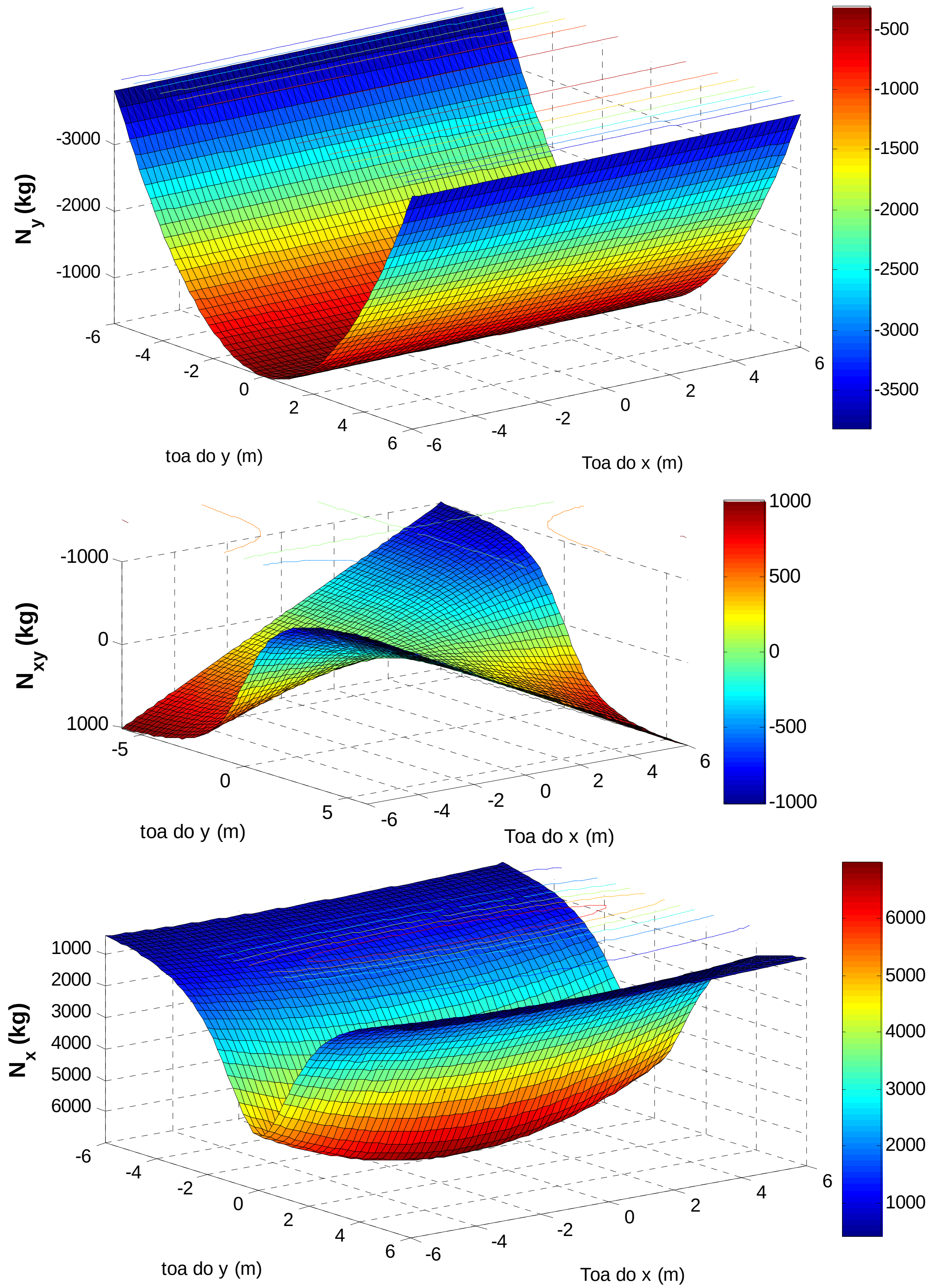
• Sử dụng các biểu thức tính lực màng ở trên:

+ Với trọng lượng bản thân: $\begin{cases} N_y = -315\left(1+\dfrac{25}{81}y^2\right) \\ N_{xy} = 97,2\dfrac{xy}{\sqrt{1+\frac{25}{81}y^2}} \\ N_x = -97,2\dfrac{1}{1+\frac{25}{81}y^2}\left(\dfrac{x^2}{2}-72\right) \end{cases}$



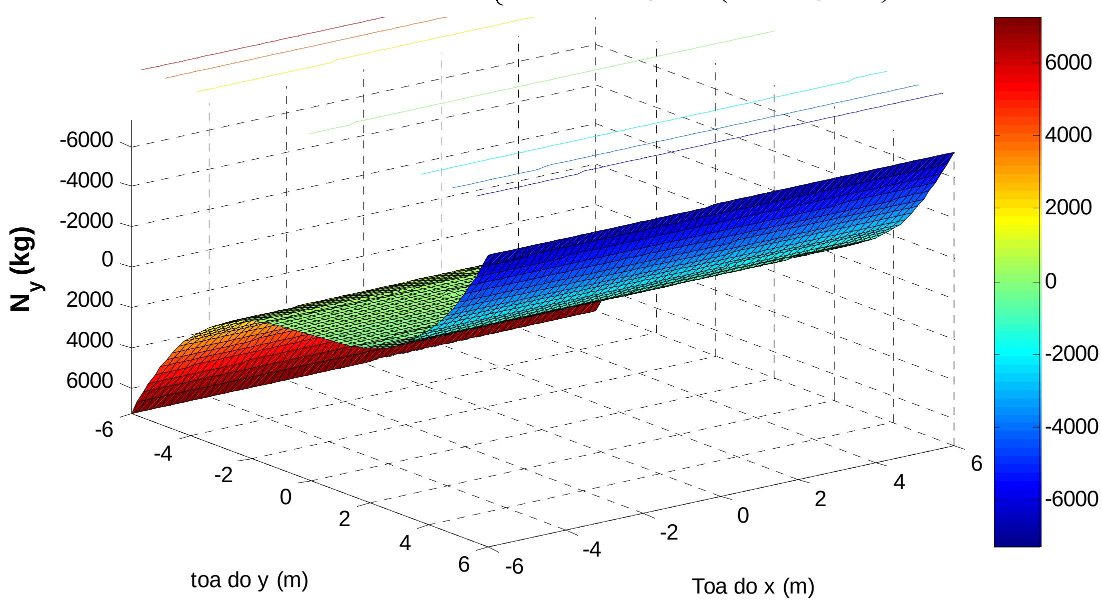
g tải trọng quy chiếu do trọng lượng bản thân

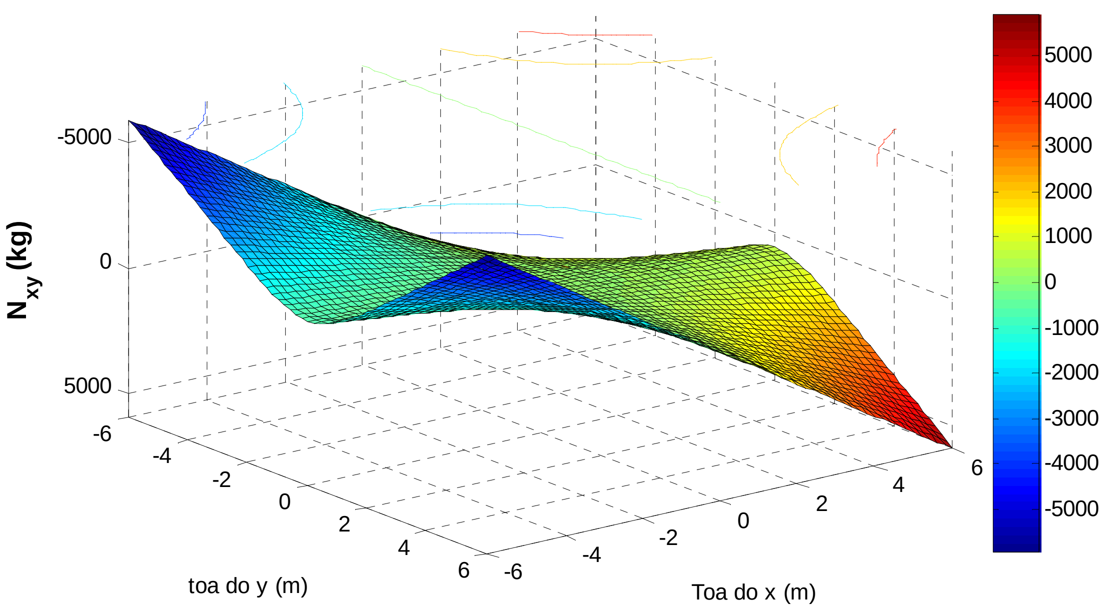


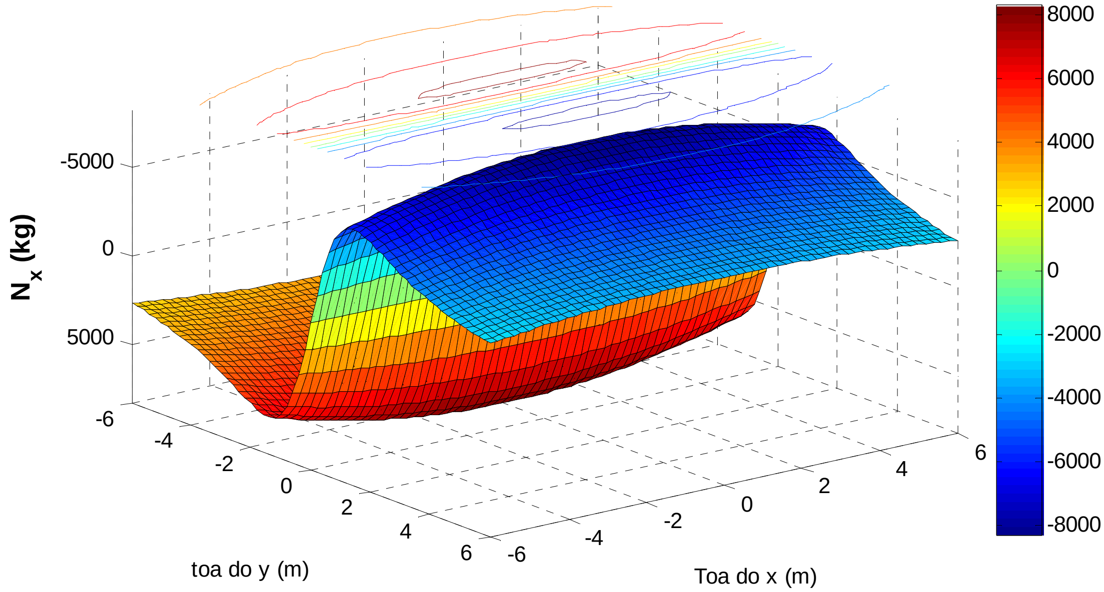


Biểu đồ phân bố lực màng N_y, N_{xy}, N_x do tải trọng bản thân gây ra.

+ Với tải trọng gió: $$\begin{cases} N_y = -100y\left(1+\dfrac{25}{81}y^2\right) \\ N_{xy} = -100\left(\sqrt{1+\dfrac{25}{81}y^2}+\dfrac{0,62y^2}{\sqrt{1+\dfrac{25}{81}y^2}}\right)x \\ N_x = 31\dfrac{y}{1+\dfrac{25}{81}y^2}\left(3+\dfrac{2}{1+\dfrac{25}{81}y^2}\right)\left(\dfrac{x^2}{2}-72\right) \end{cases}$$



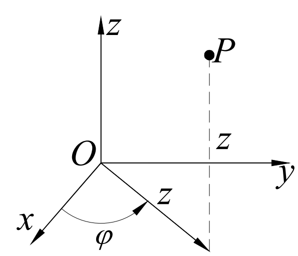




Biểu đồ phân bố của lực màng N_y, N_{xy}, N_x do tải trọng gió gây ra.

2.2.4. Lý thuyết màng trong hệ tọa độ trụ

2.2.4.1. Lý thuyết chung:



Trong thực tế, người ta thường sử dụng các vỏ tròn xoay, khi đó để đơn giản và thuận tiện, người ta sử dụng hệ tọa độ trụ. Phương trình mặt vỏ được cho bởi: $z=f(r)$, còn hàm ứng suất thì: $F = F(r,\varphi)$. Và phương trình vi phân hàm ứng suất trong hệ tọa độ trụ nhận được từ việc thực hiện phép đổi biến là:

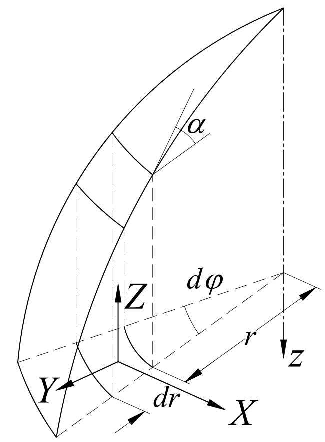
$$F_{rr}Z_r + Z_{rr}\left(F_r + \frac{1}{r}F_{\varphi\varphi}\right) = -rz + \left[z_r\left(\int Yrdr + \iint Xrdrd\varphi\right)\right]_r \equiv V(v,\varphi) \tag{2.15}$$

ở đây: $X(r,\varphi), Y(r,\varphi) \,\&\, Z(r,\varphi)$ là các thành phần theo phương tiếp tuyến, phương bán kính và phương thẳng đứng trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng *Oxy* của tải ngoài (các thành phần quy chiếu của tải trọng).

Và quan hệ giữa các nội lực màng quy chiếu và hàm ứng suất là:

$$\begin{cases} n_r = \dfrac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi} + \dfrac{1}{r}F_r - \dfrac{1}{r}\left(\int Yrdr + \iint Xrdrd\varphi\right) \\ n_\varphi = F_{rr} - \int Xrd\varphi \\ n_{r\varphi} = \dfrac{1}{r^2}F_\varphi - \dfrac{1}{r}F_{r\varphi} \end{cases} \tag{2.16}$$

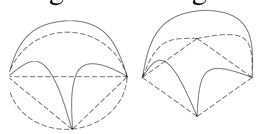
Nếu gọi α là góc nghiêng giữa tiếp tuyến của đường sinh qua điểm khảo sát và phương ngang (như hình vẽ) thì các lực màng và các lực quy chiếu của nó có quan hệ sau:

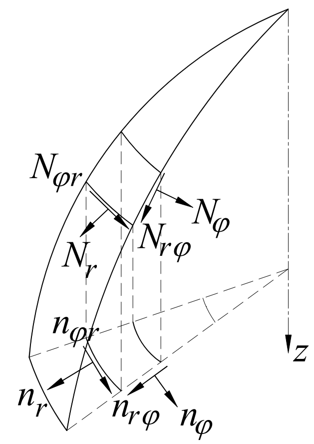


$$\begin{cases} n_r = N_r \cos\alpha \\ n_\varphi = \dfrac{N_\varphi}{\cos\alpha} \\ n_{r,\varphi} = N_{r\varphi} \end{cases} \qquad (2.17)$$

• Điều kiện biên:

Liên kết trên biên vỏ tròn xoay thường cũng là đối xứng trục nhưng cũng có thể không đối xứng trục khi biên vỏ có mặt bằng là các đa giác đều hoặc không đều (hình vẽ).





Trường hợp đặc biệt, khi biên vỏ là đường tròn và bán kính là đối xứng trục cả về liên kết và tải trọng thì hàm ứng suất chỉ là hàm của 1 biến *r*, không phục thuộc vào biến φ. Phương trình vi phân hàm ứng suất là phương trình 1 biến.

Khi biên vỏ có mặt bằng là các đa giác thường , mép biên được cấu tạo tựa trên các dầm biên và các dầm biên này được xem như không chịu lực pháp của vỏ truyền vào. Hàm ứng suất là hàm của 2 biến r, φ.

2.2.4.2. Vỏ tròn xoay chịu tải đối xứng trục:

Khi vỏ là tròn xoay có liên kết đối xứng trục và chịu tải trọng đối xứng trục thì dễ thấy rằng hàm ứng suất chỉ là hàm của *r*.

Giả sử tải trọng là thẳng đứng và đặc trưng bởi hàm bất kỳ: $Z = g(r)$

Do bài toán là đối xứng trục, hàm ứng suất là hàm của r nên $F_\varphi = 0$ & $F_{\varphi\varphi} = 0$. Và như vậy, phương trình hàm vi phân hàm ứng suất (2.15) có dạng:

$$F_{rr}z_r + F_r z_{rr} = -rZ = -rg(r) \qquad (a)$$

Vì: $F_{rr}z_r + F_r z_{rr} = (F_r z_r)_r$ nên phương trình (a) viết lại là: $(F_r z_r)_r = -rg(r)$

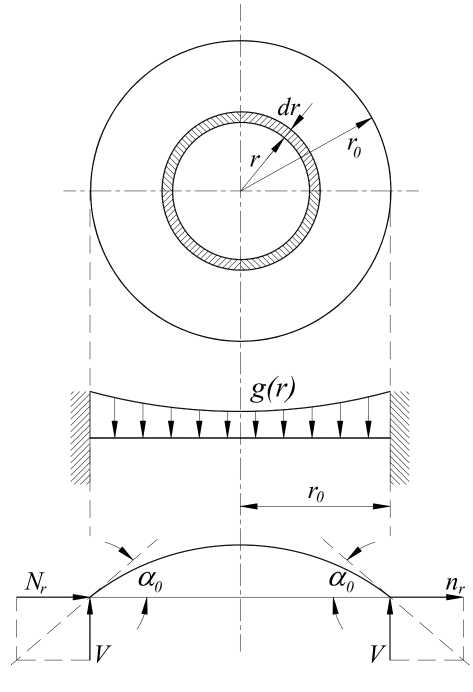
Từ đó, ta có: $F_r = -\dfrac{\int rg(r)\,dr + C}{z_r}$

Và theo (2.16), các lực màng quy chiếu là:

$$\begin{cases} n_r = \dfrac{1}{r}F_r = -\dfrac{\int rg(r)\,dr + C}{r.z_r} \\ n_\varphi = F_{rr} = \dfrac{d}{dr}\left[-\dfrac{\int rg(r)\,dr + C}{r.z_r}\right] = \dfrac{d}{dr}(rn_r) \\ n_{r\varphi} = 0 \end{cases} \qquad (b)$$

trong đó: C là hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên như dưới đây.

Và các phản lực liên kết này có phương tiếp tuyến với vỏ tại mép biên và có thể tìm được từ tải trọng đã cho (hình vẽ).



Hợp lực của tải trọng thẳng đứng tác dụng lên vỏ dễ thấy là:

$$G = \int_0^{r_0} 2\pi r g(r)\,dr = 2\pi \int_0^{r_0} r g(r)\,dr$$

Phản lực thẳng đứng V trên 1 đơn vị dài biên:

$$V = -\frac{G}{2\pi r_0} = -\frac{\int_0^{r_0} r g(r)\,dr}{r_0} \qquad \text{(c)}$$

Mặt khác, phản lực thẳng đứng V này cũng tính được từ lực màng quy chiếu n_r, đó là quan hệ:

$$V = n_r \tan\alpha_0 = n_r z_r(r_0)$$

trong đó: $\tan r_0 = \left.\dfrac{dz}{dr}\right|_{r_0} = z_r(r_0)$

Vậy, từ đây suy ra, trên biên $r=r_0$:

$$V = -\left[\frac{1}{r_0}\int_0^{r_0} r g(r)\,dr + \frac{C}{r_0}\right] \qquad \text{(d)}$$

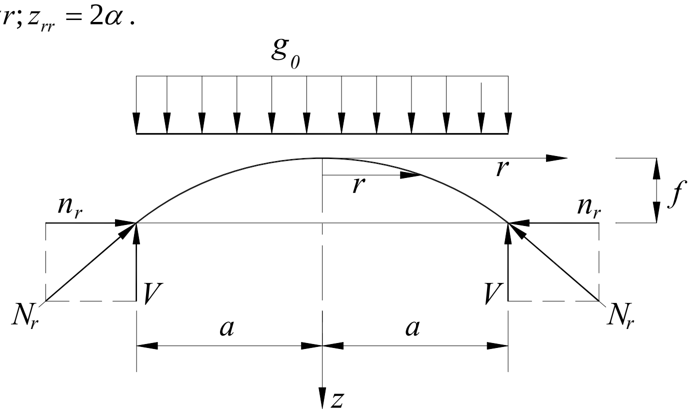
So sánh (c) và (d) , suy ra: $C=0$

2.2.4.3. Vỏ paraboloid tròn xoay với biên tròn:

Xét một paraboloid tròn xoay có phương trình $z = \dfrac{4}{a^2}r^2 = \alpha r^2$ (ở đây $\alpha = \dfrac{f}{a^2}$)

Tính sẵn các đạo hàm: $z_r = 2\alpha r; z_{rr} = 2\alpha$.

Xét vỏ chịu tải trọng đối xứng trục: Do điều kiện biên liên kết ở mép vỏ cũng đối xứng trục nên sử dụng được phương pháp vừa nêu trên, tức là từ việc khảo sát sự cân bằng của phần vỏ (phía trên) được tính ra bởi mặt cắt ngang bất kỳ song song mặt phẳng *Oxy*. Khi đó:



$$n_r = -\frac{\int r g(r)\,dr}{2\alpha r^2}$$

và $n_\varphi = \dfrac{d}{dr}(r n_r)$

- Trường hợp tải trọng quy chiếu phân bố đều cường độ g_0 (hình vẽ):

$$n_r = -\frac{\int r g(r)\,dr}{2\alpha r^2} = -\frac{g_0 \int r\,dr}{2\alpha r^2} = -\frac{g_0}{2\alpha r^2}\left(\frac{r^2}{2} + C_1\right) = -\frac{g_0}{4\alpha} - \frac{g_0 C_1}{2\alpha r^2}$$

+ Nếu vỏ không có lỗ chiếu sáng tự nhiên thì từ điều kiện biên tại đỉnh (*r=0*) thì nội lực màng không thể có giá trị ∞, ta suy ra $C_1=0$.

Vậy: $$\begin{cases} n_r = -\dfrac{g_0}{4\alpha} = -\dfrac{g_0 a^2}{4f} \\ n_\varphi = \dfrac{d}{dr}\left(rdr\right) = -\dfrac{g_0}{4\alpha} = -\dfrac{g_0 a^2}{4f} \\ n_{r\varphi} = 0 \end{cases}$$

+ Nếu vỏ có lỗ chiếu sáng tự nhiên có bán kính b và mép lỗ không có dầm vòng thì ta xem mép vỏ là tự do tại r=b. Do đó, có điều kiện biên:

$$n_r\big|_{r=b} = 0 \Rightarrow n_r\big|_{r=b} = -\frac{g_0}{2\alpha b^2}\left(\frac{b^2}{2} + C_1\right) = 0$$

Từ đó, ta nhận được: $C_1 = -\dfrac{b^2}{2}$

Vậy: $$\begin{cases} n_r = -\dfrac{g_0}{2\alpha r^2}\left(\dfrac{r^2 - b^2}{2}\right) = -\dfrac{g_0}{4\alpha} + \dfrac{g_0 b^2}{4\alpha r^2} \\ n_\varphi = \left(n_r r\right)_r = -\dfrac{g_0}{4\alpha}\left(1 + \dfrac{b^2}{r^2}\right) \\ n_{r\varphi} = 0 \end{cases}$$

- Vỏ chịu tải trọng bản thân:

Nếu trọng lượng bản thân của 1 đơn vị diện tích mặt vỏ là g_0 thì thành phần thẳng đứng quy chiếu hay cường độ của tải trọng theo phương thẳng đứng trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng *Oxy* là *g* và: $g = g_b\sqrt{1 + z_r^2} = g_b\sqrt{1 + 4\alpha^2 r^2}$

Để tránh các khó khăn trong tính toán sau này do công thức chứa căn bậc 2, ta sẽ sử dụng biểu thức khai triển gần đúng như sau:

$$g \approx g_b\left(1 + \frac{z_r^2}{2}\right) = g_b\left(1 + 2\alpha^2 r^2\right) = g_b + g_b 2\alpha^2 r^2$$

Hay: $g \approx g_b + g_1 r^2$ trong đó: $g_1 = 2\alpha^2 g_b$

Với nhận xét rằng nội lực màng quy đổi do số hạng thứ I của biểu thức tải trọng g đã xét ở trên, nên các thành phần lực màng do số hạng thứ II $g_1 r^2$ được xét riêng ở đây như sau (chú ý do riêng số hạng $g_1 r^2$):

$$n_r = -\frac{\int rg(r)dr}{2\alpha r^2} = -\frac{\int g_1 r^3 dr}{2\alpha r^2} = -\frac{g_1\left(\dfrac{r^4}{4} + C_2\right)}{2\alpha r^2} = -\frac{g_1}{8\alpha}\left(r^2 + \frac{4C_2}{r^2}\right)$$

Cũng như đã xét ở trên, nếu vỏ không có lỗ thì C_2=0 và nếu vỏ có đường kính 2b thì $C_2 = -\dfrac{b^2}{4}$

Từ đó ta dễ dàng tìm được các thành phần lực màng quy chiếu cho vỏ chịu tải trọng là trọng lượng bản thân vỏ với $g = g_0 + g_1 r^2$ như sau:

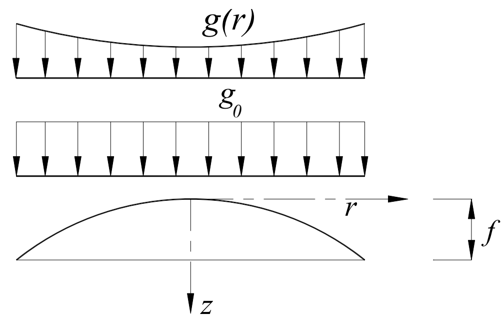
+ Vỏ không lỗ:

$$\begin{cases} n_r = -\dfrac{g_0}{4\alpha} - \dfrac{g_1 b^2}{8\alpha} = -\dfrac{g_0}{4\alpha}\left(1+\alpha^2 r^2\right) = -\dfrac{g_b a^2}{4f}\left(1+\dfrac{f}{a^4}r^2\right) \\ n_\varphi = -\dfrac{g_0}{4\alpha} - \dfrac{3g_1 b^2}{8\alpha} = -\dfrac{g_0}{4\alpha}\left(1+3\alpha^2 r^2\right) = -\dfrac{g_b a^2}{4f}\left(1+\dfrac{3f}{a^4}r^2\right) \\ n_{r\varphi} = 0 \end{cases}$$

+ Vỏ có lỗ đường kính 2b, trên đỉnh: với $g_1 = 2\alpha^2 g_b = 2\dfrac{f^2}{a^4}g_b$

$$\begin{cases} n_r = -\dfrac{g_b}{4\alpha}\left(1-\dfrac{b^2}{r^2}\right) - \dfrac{g_1}{8\alpha}\left(r^2 - \dfrac{b^4}{r^2}\right) \\ n_\varphi = -\dfrac{g_b}{4\alpha}\left(1+\dfrac{b^2}{r^2}\right) - \dfrac{g_1}{8\alpha}\left(3r^2 + \dfrac{b^4}{r^2}\right) \\ n_{r\varphi} = 0 \end{cases}$$

Bài toán: Cho mái vỏ paraboloid tròn xoay chịu tải trọng như hình vẽ khảo sát sự phân bố của các lực màng quy chiếu. Xác định các nội lực màng tác động trên mép vỏ. Cho: a=15*m*, f=5*m*, g_0=80*kg/m*^{2}, g_b=200*kg/m*^{2} (vỏ dày 5*cm*)



2.2.5. Lý thuyết vỏ màng trong hệ tọa độ tự nhiên:

2.2.5.1. Lý thuyết chung đối với vỏ tròn xoay:

Trong hệ tọa độ tự nhiên (hệ tọa độ cầu), khi xét đến nội lực của một vỏ tròn xoay, người ta sử dụng các đặc trưng hình học sau (hình vẽ):

r – bán kính đường tròn thiết tuyến nằm ngang

r_α – bán kính cong chính theo phương kinh tuyến

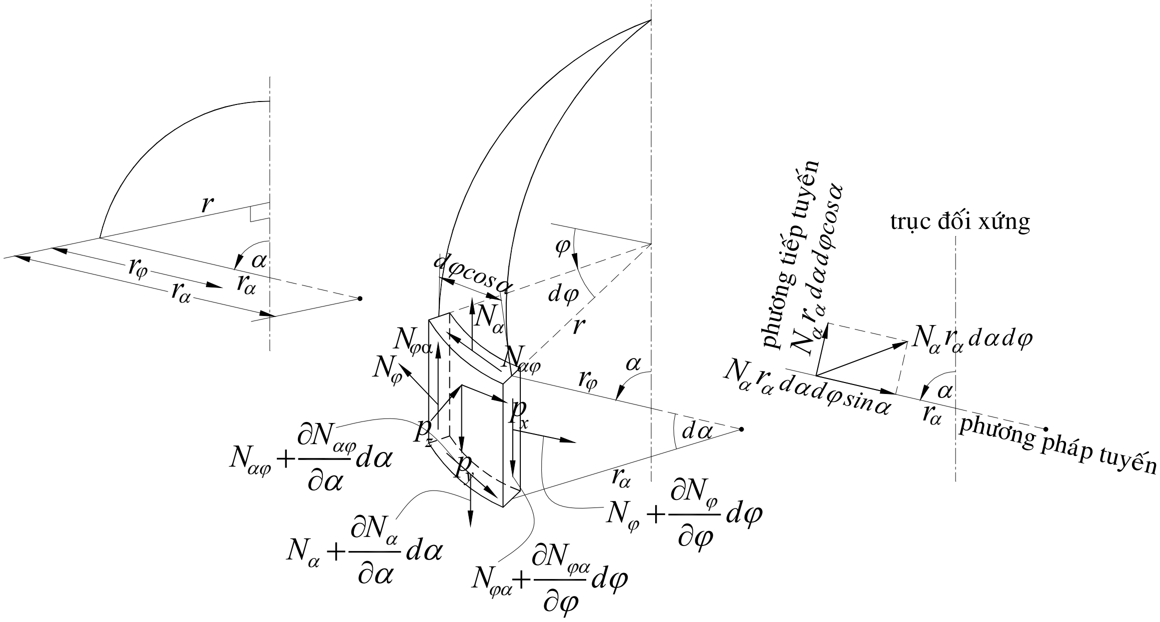
r_φ – bán kính cong chính theo phương vòng tại điểm khảo sát.

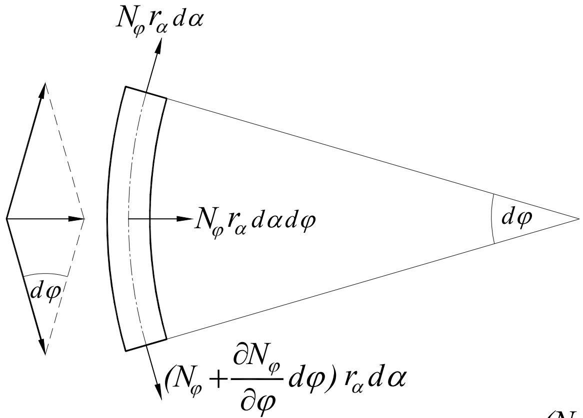
Các tải trọng mặt (cường độ trên 1 đơn vị diện tích mặt cong) có các thành phần vuông góc nhau là:

p_x – theo phương vòng

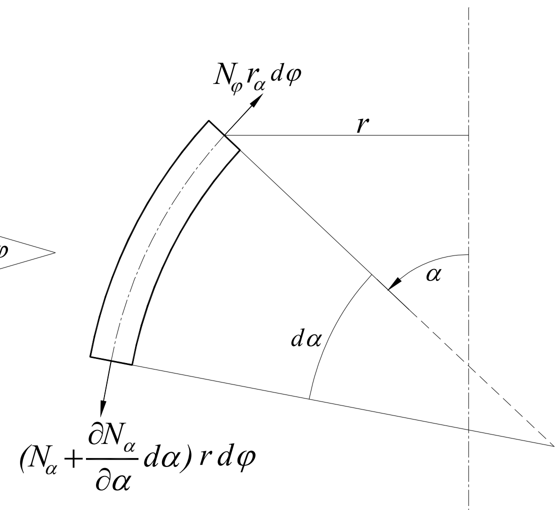
p_y – theo phương kinh tuyến

p_z – theo phương pháp tuyến mặt cong.





theo phương vòng



theo phương tiếp tuyến

Như phương pháp quen thuộc, ta sẽ khảo sát sự cân bằng của 1 phân tố vỏ được tách ra bởi 2 mặt phẳng kinh tuyến nghiêng với nhau góc $d\varphi$ và 2 mặt phẳng vuông góc với kinh tuyến nghiêng với nhau góc $d\alpha$.

Mặt phẳng kinh tuyến và mặt phẳng vuông góc kinh tuyến là mặt phẳng của độ cong chính (chứa các đường cong chính) tại điểm khảo sát. Bán kính cong của các đường cong chính này chính là r_α và r_φ. Còn r là bán kính cong của vòng tròn vĩ tuyến nằm ngang qua điểm khảo sát.

Phương trình cân bằng theo phương vòng là:

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi} r_\alpha d\varphi d\alpha + \frac{\partial\left(N_{\alpha\varphi} r\right)}{\partial\alpha} d\varphi d\alpha + N_{\varphi\alpha} r_\alpha \cos\alpha d\varphi d\alpha + p_x r r_\alpha d\varphi d\alpha = 0$$

Theo phương kinh tuyến:

$$\frac{\partial N_{\varphi\alpha}}{\partial\varphi} r_\alpha d\varphi d\alpha - N_\varphi r_\alpha \cos\alpha d\varphi d\alpha + \frac{\partial\left(N_\alpha r\right)}{\partial\alpha} d\varphi d\alpha + p_y r r_\alpha d\varphi d\alpha = 0$$

Phương trình cân bằng theo phương pháp tuyến:

$$N_\varphi r_\alpha \sin\alpha d\varphi d\alpha + N_\alpha r d\varphi d\alpha + p_z r r_\alpha d\varphi d\alpha = 0$$

Sử dụng các quan hệ sau: $\begin{cases} r = r_\varphi \sin\alpha \\ N_{\varphi\alpha} = N_{\alpha\varphi} \end{cases}$

thì các phương trình cân bằng trên được đưa về dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} r_\alpha + \dfrac{\partial\left(N_{\alpha\varphi} r\right)}{\partial \alpha} + N_{\varphi\alpha} r_\alpha \cos\alpha + p_x r r_\alpha = 0 \\ \dfrac{\partial N_{\varphi\alpha}}{\partial \varphi} r_\alpha - N_\varphi r_\alpha \cos\alpha + \dfrac{\partial\left(N_\alpha r\right)}{\partial \alpha} + p_y r r_\alpha = 0 \\ \dfrac{N_\varphi}{r_\varphi} + \dfrac{N_\alpha}{r_\alpha} = -p_z \end{cases} \tag{2.18}$$

(2.18) là hệ phương trình cân bằng của vỏ màng tròn xoay trong hệ tọa độ tự nhiên.

<u>Trường hợp đặc biệt:</u> khi tải trọng và liên kết cũng là đối xứng trục, lúc này trạng thái ứng suất của vỏ không phụ thuộc vào biến φ và $N_{\varphi\alpha}$=0, tải trọng p_x=0. Các phương trình cân bằng chỉ còn 2 phương trình và có dạng đơn giản như dưới đây: (Phương trình đầu đồng nhất bằng 0).

$$\begin{cases} -N_\varphi r_\alpha \cos\alpha + \dfrac{\partial\left(N_\alpha r\right)}{\partial \alpha} + p_y r r_\alpha = 0 \\ \dfrac{N_\varphi}{r_\varphi} + \dfrac{N_\alpha}{r_\alpha} + p_z = 0 \end{cases} \tag{a}$$

Từ phương trình cuối của (a), ta có:

$$N_\varphi = -r_\varphi\left(p_z + \frac{N_r}{r_\alpha}\right) \Rightarrow \text{ Dạng khác: } \frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\alpha}{r_\alpha} = -p_z \tag{b}$$

Thay N_φ theo (b) vào phương trình đầu của (a) rồi nhân 2 vế với sinα, rút gọn lại, ta có:

$$-N_\varphi r_\alpha \sin\alpha\cos\alpha + \frac{d\left(N_\alpha r_\varphi \sin\alpha\right)}{d\alpha}\sin\alpha = -r_\alpha r_\varphi\left(p_y \sin\alpha + p_z\cos\alpha\right)\sin\alpha$$

Dễ thấy là vế trái của phương trình này là đạo hàm $\dfrac{d}{d\alpha}\left(N_\alpha r_\varphi \sin^2\alpha\right)$ nên ta rút ra:

$$\frac{d}{dr}\left(N_r r_\varphi \sin^2\alpha\right) = -r_\alpha r_\varphi\left(p_y\sin\alpha + p_z\cos\alpha\right)\sin\alpha$$

Từ đó, ta có: $N_\alpha = -\dfrac{1}{r_\varphi \sin^2\alpha}\left[\int r_\alpha r_\varphi\left(p_y\sin\alpha + p_z\cos\alpha\right)\sin\alpha d\alpha + C\right]$ (c)

Hằng số tích phân C được xác định từ điều kiện biên.

<u>Trường hợp tải trọng thẳng đứng:</u> các phản lực thẳng đứng nằm dọc biên có thể biểu diễn theo các lực kinh tuyến N_α như sau:

$$2r\pi N_\alpha \sin\alpha + G = 0$$

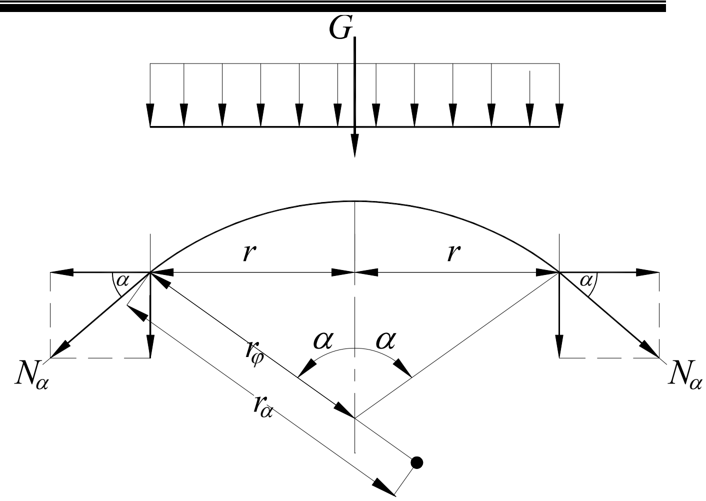
trong đó G là hợp lực của tải trọng thẳng đứng tác dụng lên vỏ.

Từ đó suy ra:

$$N_\alpha = -\frac{G}{2r\pi\sin\alpha} = -\frac{G}{2\pi r_\varphi \sin^2\alpha}$$

Sau đó, dễ dàng tìm được lực vòng theo (b):

$$N_\varphi = -r_\varphi\left(p_z + \frac{N_\alpha}{r_\alpha}\right)$$

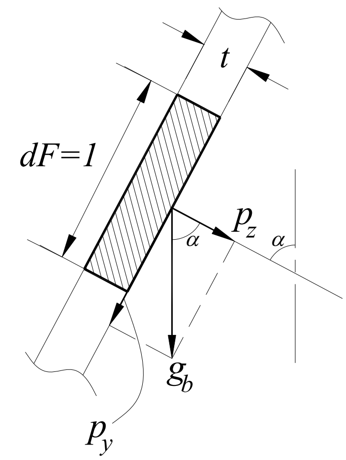


2.2.5.2. Tải trọng:

Như đã biết ở trên, tải trọng tác dụng trên mặt vỏ được phân thành 3 thành phần theo 3 phương là phương vòng, phương tiếp tuyến và phương pháp tuyến lần lượt là p_x, p_y & p_z. Và trong trường hợp tải trọng đối xứng trục thì ta có: p_x=0.

- ***Với tải trọng bản thân:*** Nếu ký hiệu g_b là trọng lượng của 1 đơn vị diện tích mặt thì từ hình vẽ bên dễ dàng thấy các thành phần tải trọng trên sẽ là:

$$\begin{cases} p_x = 0 \\ p_y = g_b \sin\alpha \\ p_z = g_b \cos\alpha \end{cases}$$



- *Trường hợp tải trọng được cho theo giá trị quy chiếu* (trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng) (tải trọng tuyết hay đất đắp). Nếu gọi *p* là giá trị quy chiếu theo phương thẳng đứng (phương z) của tải trọng (trên 1 đơn vị diện tích mặt bằng) thì từ hình vẽ dưới, ta cũng sẽ dễ thấy giá trị các thành phần theo các phương vòng, kinh tuyến, phương

$$\begin{cases} p_x = 0 \\ p_y = p\sin\alpha\cos\alpha \\ p_z = p\cos^2\alpha \end{cases}$$

- *Tiếp tuyến vuông góc mặt vỏ* có giá trị không đổi q (áp lực khí, gas, ...), khi đó: $\begin{cases} p_x = p_y = 0 \\ p_z = \pm q \end{cases}$ (dấu (+) ứng với trường hợp khi tải trọng có chiều hướng vào tâm vỏ = áp lực nén)

- *Vỏ chịu áp lực thủy tĩnh* thì mặt vỏ chịu tải trọng:

$$\begin{cases} p_x = p_y = 0 \\ p_z = \gamma h \end{cases}$$ trong đó h là chiều cao cột chất lỏng

2.2.5.3. Áp dụng và thí dụ:

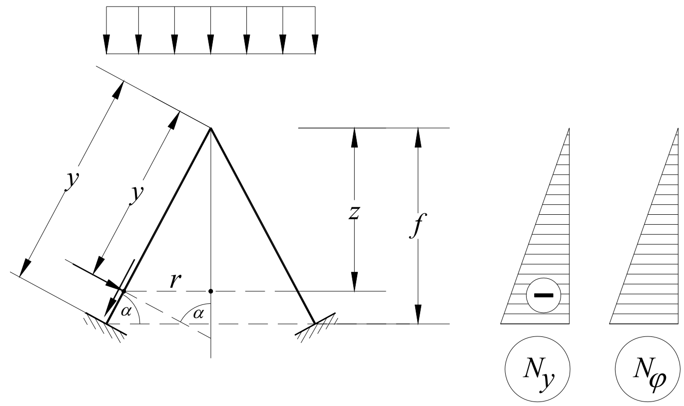
1) <u>Vỏ nón:</u> từ hình vẽ bên ta có:

$$\begin{cases} r_\varphi = y\cot\alpha \\ r = y\cos\alpha \\ r_\alpha = \infty \end{cases}$$

trong đó y là khoảng cách từ đỉnh nón đến mặt cắt đang xét.

Với tải trọng bản thân, ta có:

$$\begin{cases} p_z = g\cos\alpha \\ p_y = g\sin\alpha \end{cases}$$



Thay ký hiệu N_α bằng N_y, sử dụng các công thức đã có ở trên, ta có:

$$N_y \equiv N_\alpha = -\frac{G_\alpha}{2\pi y\cos\alpha\sin\alpha}$$

trong đó: $\underline{G_\alpha = 2\pi\cos\alpha\int_0^y \left(p_y\sin\alpha + p_z\cos\alpha\right)ydy = gy^2\pi\cos\alpha}$: là hợp lực theo phương thẳng đứng của tải trọng tác dụng trong phần vỏ đang xét.

Hay cũng có thể tính G_α một các đơn giản hơn:

$$G_\alpha = \int_0^y \left(2\pi r dy\right)g = \int_0^y 2\pi y\cos\alpha g dy = 2\pi g\cos\alpha\int_0^y ydy = gy^2\pi\cos\alpha$$

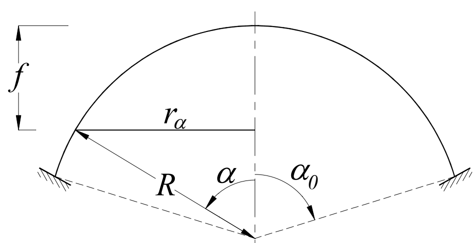
Vậy: $N_y = -\dfrac{gy^2\pi\cos\alpha}{2\pi y\cos\alpha\sin\alpha} = -\dfrac{gy}{2\sin\alpha}$

Và lực vòng là: $N_\varphi = -r_\varphi\left(p_z + \dfrac{N_\alpha}{r_\alpha}\right) = -r_\varphi p_z = -p_z y\cot\alpha = -gy\cos\alpha\cot\alpha$

Từ biểu thức N_y, N_φ dễ thấy các lực màng có giá trị tỉ lê với khoảng cách y, đến đỉnh nón.

2) <u>Vỏ cầu:</u>

Dễ thấy rằng, với vỏ cầu $r_\alpha + r_\varphi = R$: bán kính mặt trung gian vỏ. Xét vỏ cầu chịu trọng lượng bản thân cường độ g (trên 1 đơn vị diện tích mặt).Vậy dọc theo vòng tròn vĩ tuyến xác định bởi góc α, ta có các tải trọng thành phần: $p_x = 0, p_y = g\sin\alpha, p_z = g\cos\alpha$.



Lực màng theo phương kinh tuyến N_α được xác định từ sự cân bằng của phần chỏm cầu được tách ra bởi mặt cắt xác định bởi góc α (như ở phần ***1)*** đã nói).

$$N_\alpha = -\frac{G_\alpha}{2\pi r_\varphi\sin^2\alpha} = -\frac{G_\alpha}{2\pi r\sin\alpha} \qquad \left(vì: r = r_\varphi\sin\alpha\right)$$

Diện tích bề mặt phần chỏm cầu: $F_\alpha = 2\pi Rf = 2\pi R^2\left(1-\cos\alpha\right)$

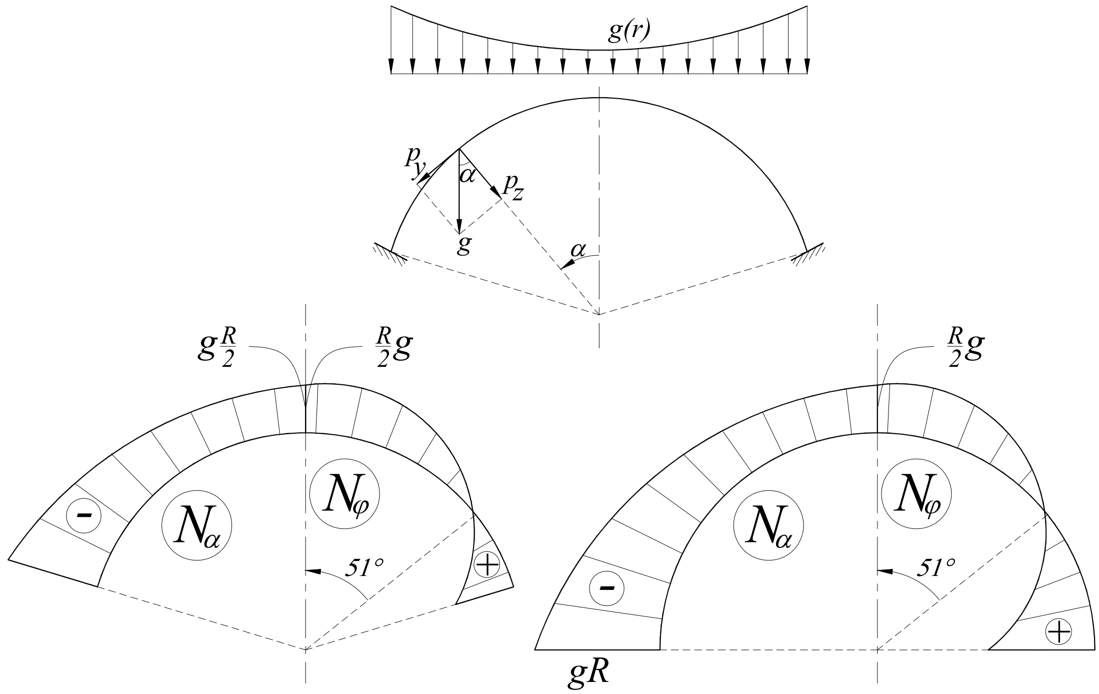
Nên dễ thấy là: $G_\alpha = gF_\alpha = 2\pi R^2 g\left(1-\cos\alpha\right)$

Vậy: $N_\alpha = -\dfrac{2\pi R^2 g\left(1-\cos\alpha\right)}{2\pi r\sin\alpha} = -\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}gR = -\dfrac{gR}{1+\cos\alpha}$

Biết N_α, ta dễ dàng tìm được lực màng theo phương vòng N_φ, từ biểu thức đã có:

$$N_\varphi = -r_\varphi\left(p_z + \frac{N_r}{r_\alpha}\right) = -R\left(p_z + \frac{N_r}{r_\alpha}\right) = -Rp_z - N_\alpha$$

$$N_\varphi = -Rg\cos\alpha + \frac{gR}{1+\cos\alpha} = -Rg\left(\cos\alpha - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right)$$



Sự biến thiên của các lực màng N_α và N_φ được minh họa như trên hình vẽ. Hình thứ 3 là đối với trường hợp $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$

2.2.6. Vỏ tròn xoay chịu tải trọng gió:

2.2.6.1. Phương pháp chung:

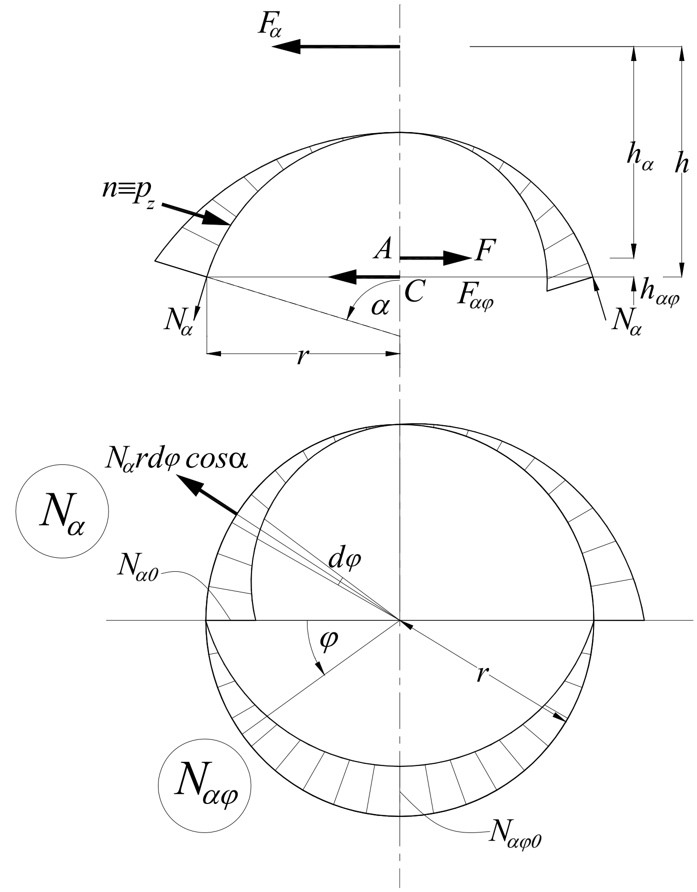
Nội lực màng trong vỏ tròn xoay chịu tải trọng gió về nguyên tắc là hoàn toàn có thể tìm được từ các phương trình và phương pháp đã nêu ở các phần trên. Tuy nhiên, việc thực hiện tải trọng một cách chặt chẽ thường gặp nhiều khó khăn về toán học, vì thế, để đơn giản, tùy thuộc vào hình dạng mặt vỏ mà người ta sử dụng phương pháp đơn giản và hiệu quả sau:

Nếu tải trọng bản thân, tải trọng đất đắp, ... được xem là tải trọng đối xứng và gây ra hệ nội lực màng cũng đối xứng trong trường hợp vỏ tròn xoay (cả hình dạng và liên kết) thì ngược lại, với tải trọng gió – như đã biết trong các quy phạm tính – thì các giá trị tải trọng phụ thuộc vào hướng gió, độ cao điểm khảo sát và luật phân bố hút – đẩy khá phức tạp. Tuy nhiên, các bài toán có thể đn giản nhiều nếu trong trường hợp vỏ tròn xoay, ta xem tải trọng gió là tải trọng vuông góc mặt vỏ, phản xứng và có cường độ:

$$p_z = p(\alpha)\cos\varphi \qquad \text{(a)}$$

trong biểu này, • $p(\alpha)$ biểu thị tải trọng biến thiên phụ thuộc vào độ cao của điểm khảo sát theo phương kính tuyến: $p(\alpha) = n_0 \sin\alpha$ (n_0: giá trị cho trong quy phạm)

• $\cos\alpha$ biểu thị ảnh hưởng của hướng gió đối với điểm khảo sát (lấy theo phương vòng). Vị trí tương ứng giá trị góc φ=0 là tương ứng với hướng gió.



Dưới tác dụng của tải trọng phản xứng này, hê nội lực màng cũng là phản xứng và cụ thể: trên 1 mặt cắt ngang bất kỳ xác định bởi góc α (thì các lực màng có luật phân bố (dọc phương vòng):

$$\begin{cases} N_\alpha = N_{\alpha o}\cos\varphi \\ N_\varphi = N_{\varphi o}\cos\varphi \\ N_{\alpha\varphi} = N_{\alpha\varphi o}\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

ở đây, $N_{\alpha 0}$, $N_{\varphi 0}$ là giá trị các lực màng N_α và N_φ tại các vị trí tương ứng góc φ=0, tức vị trí tương ứng với hướng gió.

Còn $N_{\alpha\varphi 0}$ là giá trị lực $N_{\alpha\varphi}$ lớn nhất trong mặt cắt và tương ứng vị trí φ=90^0 (hình vẽ).

Xét cân bằng phần vỏ được tách ra từ bởi mặt cắt ngang (hình vẽ) với các đặc trưng hình học như hình vẽ.

Dọc theo mặt cắt có các lực màng N_α và N_φ.

Gọi F_α là hợp lực của các lực pháp N_α trên mặt cắt. Do tính chất phản xứng, F_α vuông góc với trục đối xứng của vỏ và có điểm đặt ngang tại đỉnh của hình nón ngoại tiếp phần vỏ đang xét tại mặt cắt đang khảo sát.

Và dễ thấy một vi phân của hợp lực F_α là:

$$dF_\alpha = \left(N_\alpha rd\varphi\cos\alpha\right)\cos\varphi = rN_\alpha\cos\alpha\cos\varphi d\varphi$$

Sử dụng (b), ta có: $dF_\alpha = rN_{\alpha 0}\cos\alpha\cos^2\varphi d\varphi$

Vậy hợp lực F_α là:

$$F_\alpha = \int_{\text{toàn mặt cắt}} dF_\alpha = \int_0^{2\pi} rN_{\alpha 0}\cos\alpha\cos^2\varphi d\varphi = rN_{\alpha 0}\cos\alpha\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi$$

$$F_\alpha = \pi rN_{\alpha 0}\cos\alpha$$

Từ đó, nếu biết F_α thì biết được $N_{\alpha 0} = \dfrac{F_\alpha}{\pi\cos\alpha}$ và thay vào (b), ta được biểu thức tìm lực màng pháp N_α:

$$N_\alpha = \frac{F_\alpha}{\pi r\cos\alpha}\cos\varphi \qquad \text{(c)}$$

Tương tự: nếu gọi $F_{\alpha\varphi}$ là hợp lực tiếp $N_{\alpha\varphi}$ trên mặt cắt ngang vỏ thì dễ thấy là $F_{\alpha\varphi}$ cũng vuông góc trục đối xứng và nằm trong mặt phẳng mặt cắt (vì các lực N_φ cũng thuộc mặt cắt ngang đó).

Và: $dF_{\alpha\varphi} = \left(N_{\alpha\varphi}rd\varphi\right)\sin\varphi = rN_{\alpha\varphi}\sin\varphi d\varphi$

Vì theo (b), trên mặt cắt này: $N_{\alpha\varphi} = N_{\alpha\varphi 0}\sin\varphi$ nên $dF_{\alpha\varphi} = rN_{\alpha\varphi}\sin^2\varphi d\varphi$

Và hợp lực $F_{\alpha\varphi}$ có giá trị:

$$F_{\alpha\varphi} = \int_0^{2\pi} rN_{\alpha\varphi 0}\sin^2\varphi d\varphi = rN_{\alpha\varphi 0}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi = \pi rN_{\alpha\varphi 0}$$

Tương tự trên, nếu biết $F_{\alpha\varphi}$ thì ta tìm được $N_{\alpha\varphi 0}$, và sử dụng (b) ta sẽ có biểu thức tìm lực tiếp $N_{\alpha\varphi}$ như sau:

$$N_{\alpha\varphi} = \frac{F_{\alpha\varphi}}{\pi r}\sin\varphi \qquad \text{(d)}$$

• Với ngoại lực, gọi F là hợp lực của tải trọng gió tác dụng lên phần vỏ được tách ra (phần trên mặt cắt ngang đang khảo sát). Cũng do tính phản xứng của tải trọng gió, lực F này phải vuông góc với trục đối xứng và có độ lớn, vị trí điểm đặt phụ thuộc vào luật phân bố của tải trọng và hình dạng của vỏ. Các đại lượng này hoàn toàn tính được trong các trường hợp cụ thể.

• Cũng dễ thấy rằng, nếu biết vị trí điểm đặt (điểm A) và độ lớn của hợp lực F thì dễ tính được các giá trị F_α và $F_{\alpha\varphi}$. Từ hình vẽ, ta có:

$$F_\alpha = F\frac{h_{\alpha\varphi}}{h} \qquad \text{và} \qquad F_{\alpha\varphi} = F\frac{h_\alpha}{h}$$

Thay vào các biểu thức (c) và (d) ở trên ta được:

$$\begin{cases} N_\alpha = \dfrac{F}{\pi r\cos\alpha}\dfrac{h_{\alpha\varphi}}{h}\cos\varphi \\ N_{\alpha\varphi} = \dfrac{F}{\pi r}\dfrac{h_\alpha}{h}\sin\varphi \end{cases} \qquad (2.19)$$

Còn lực pháp N_φ tìm từ phương trình thứ 3 của (2.18) (phương trình cân bằng theo phương pháp tuyến):

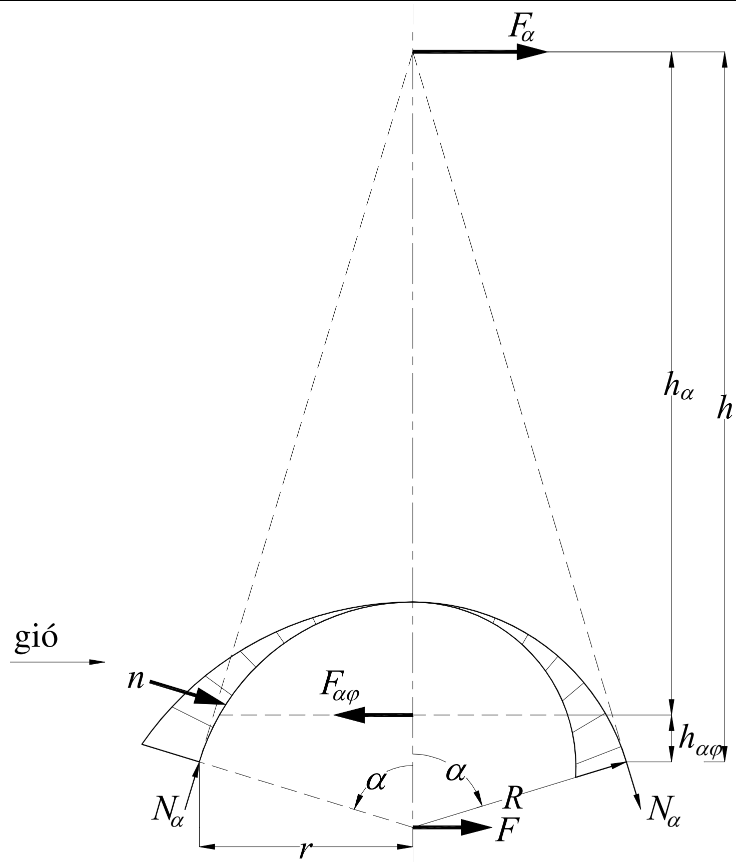
$$N_\varphi = -r_\varphi\left(n + \frac{N_\alpha}{r_\alpha}\right) \qquad (2.20)$$

trong đó: n là thành phần vuông góc mặt vỏ của tải trọng gió và có cường độ:

$$n = n_0\sin\alpha\cos\alpha \qquad \text{(e)}$$

n_0 là cường độ tải trọng gió tại vị trí ứng với φ=0

2.2.6.2. Vỏ cầu chịu tải trọng gió:



Với nhận xét rằng: tải trọng gió vuông góc với mặt cầu trên toàn mặt và đều có phương tác dụng hướng vào tâm vỏ, do vậy, vị trí điểm đặt của hợp lực F với mọi mặt cắt ngang khảo sát đều là tâm vỏ cầu (hình vẽ).

Từ hình vẽ, ta cũng thấy rằng:

$$\begin{cases} h_{\alpha\varphi} = R\cos\alpha \\ h_\alpha = \dfrac{R}{\cos\alpha} \\ h = R\tan\alpha\sin\alpha \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

Tính giá trị hợp lực tải trọng gió F trên phần vỏ tách rời: trên một vi phân diện tích mặt vỏ có độ lớn ($rd\varphi.Rd\alpha$) tải trọng gió tác dụng lực vuông góc mặt vỏ với giá trị: $n(rd\varphi.Rd\alpha)$.

Và thành phần nằm ngang theo phương gió thổi (tương ứng phương φ=0) của vỏ là:

$$dF = n\left(rd\varphi Rd\alpha\right)\sin\alpha\cos\varphi$$

Thay giá trị cường độ n theo (e) vào, ta có:

$$dF = n_0\sin^2\alpha\cos^2\varphi Rd\alpha rd\varphi$$

Và vì r=$R\sin\alpha$ nên: $dF = n_0R^2\sin^3\alpha\cos^2\varphi d\alpha d\varphi$

Thực hiện tích phân tìm F:

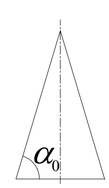
$$F = \int_0^\alpha\int_0^{2\pi} dF = n_0R^2\int_0^\alpha \sin^3\alpha d\alpha\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi$$

Ta có: $F = \dfrac{\pi n_0R^2}{3}\left(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha\right)$

Nếu chú ý rằng: trong trường hợp này F_α và $F_{\alpha\varphi}$ có dấu ngược lại nên các lực màng có biểu thức xác định theo (2.19) và (2.20) là:

$$\begin{cases} N_\alpha = -\dfrac{n_0R\cos\alpha}{3\sin^2\alpha}\left(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha\right)\cos\varphi \\ N_{\alpha\varphi} = -\dfrac{n_0R}{3\sin^3\alpha}\left(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha\right)\sin\varphi \\ N_\varphi = \dfrac{n_0R}{3\sin^3\alpha}\left(2\cos\alpha - 3\sin^2\alpha - 2\cos^4\alpha\right)\cos\varphi \end{cases}$$

Bài toán: Xác định các nội lực màng phát sinh trong vỏ nón (liên kết gối tựa dọc biên) chịu tác dụng của tải trọng gió có thành phần pháp tuyến với vỏ là: $n = n_0\sin\alpha_0\cos\varphi$



2.3. Vỏ chịu uốn:

VỎ TRỤ TRÒN THẲNG ĐỨNG CHỊU UỐN BỞI TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG TRỤC

2.3.1. Phương trình vi phân tổng quát:

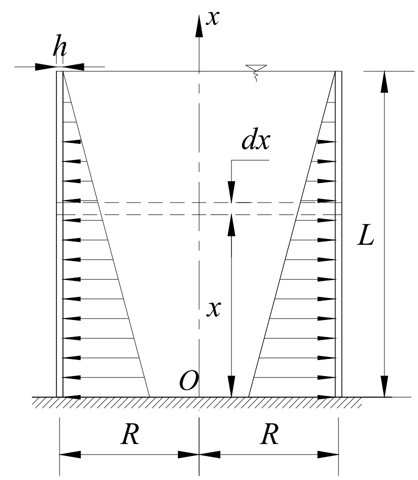
Xét vỏ trụ tròn (hình vẽ) chịu tải trọng thủy tĩnh: $p=\gamma\left(l-x\right)$. Khảo sát sự cân bằng của một phân tố vỏ (hình vẽ). Các nội lực tác dụng lên phân tố này gồm:

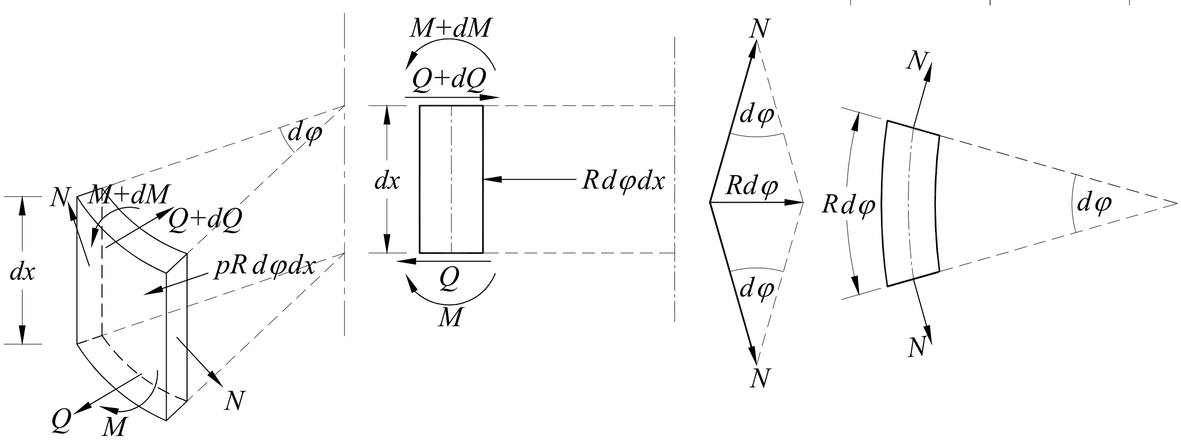
N: lực vòng

Q: lực cắt theo phương bán kính.

M: momen uốn (Quy ước: M>0 thì làm thớ trong bị kéo)

Do tính chất đối xứng trục, nội lực không phụ thuộc biến góc φ và Q_φ=0





Bỏ qua trọng lượng bản thân vỏ, phương trình hình chiếu lên phương bán kính là:

$$dQRd\varphi+Nd\varphi dx-pdxd\varphi=0 \tag{2.21}$$

Phương trình momen đối với đường thẳng tiếp tuyến, bỏ qua các VCB bậc cao, ta có:

$$\left(Qdx-dM\right)Rd\varphi=0 \tag{2.22}$$

Chia cả 2 vế của (2.21) cho $Rd\varphi dx$, ta có:

$$\frac{dQ}{dx}+\frac{N}{R}-p=0$$

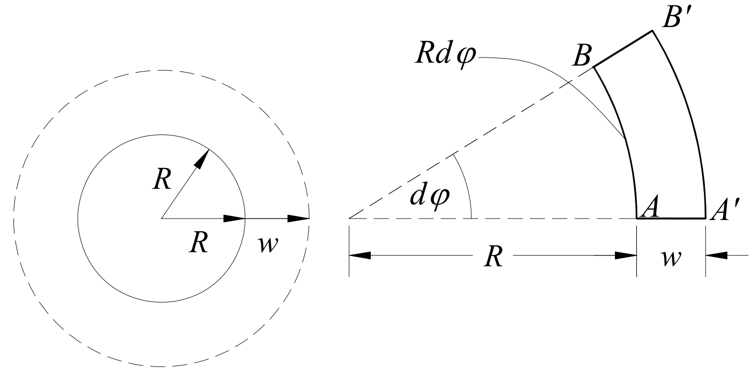
Còn từ (2.22), ta có: $\dfrac{dM}{dx}=Q$

Thay vào phương trình trên, ta nhận được:

$$\frac{d^2M}{dx^2}+\frac{N}{R}-p=0 \tag{2.23}$$

Dễ thấy rằng, do lực kéo vòng *N*, vỏ bị kéo dãn theo phương vòng và có xu hướng nở ra (hình vẽ). Biến dạng dày tương đối theo phương vòng là:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{N}{hE}$$



Mặt khác, các điểm trên mặt vỏ có chuyển vị theo phương bán kính là w và dễ thấy rằng: $\overline{A'B'} = (R+w)d\varphi = R(1+\varepsilon_\varphi)d\varphi$

Cũng có thể thấy:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(R+w)d\varphi - Rd\varphi}{Rd\varphi} = \frac{w}{R}$$

Hay: $w = \varepsilon_\varphi R$

Và: $w = \dfrac{NR}{hE} \Rightarrow \boxed{N = \dfrac{hE}{R}w}$ (2.24)

Do có chuyển vị theo phương bán kính w, độ cong vỏ biến đổi từ $\dfrac{1}{R}$ đến giá giá trị $\dfrac{1}{R+w}$. Do đó mà trên vỏ xuất hiện momen uốn M_φ theo phương vòng. Tuy nhiên, momen này rất nhỏ vì $R \gg w$ và do vậy ta có thể bỏ qua trong tính toán cho đơn giản.

Còn theo phương đường sinh vỏ, như đã biết trong sức bền là giữa độ cong và chuyển vị tồn tại liên hệ sau:

$$\kappa_x = \frac{1}{\rho} = -\frac{d^2w}{dx^2}$$

Còn giữa độ cong và momen uốn thì có quan hệ:

$$M = -D\kappa_x = D\frac{d^2w}{dx^2} \tag{2.25}$$

trong đó D là độ cứng trụ của vỏ: $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Thay (2.24), (2.25) vào (2.23), ta có:

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{hE}{R^2D}w = \frac{p}{D}$$

Đặt: $\dfrac{Eh}{R^2D} = 4\lambda^4$

$$\Rightarrow 4\lambda^4 = \frac{Eh}{R^2\dfrac{h^2E}{12(1-\nu^2)}} = \frac{12(1-\nu^2)}{R^2h^2} \Rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{Rh}}}$$

Và phương trình vi phân cấp 4 trên có dạng:

$$\boxed{\frac{d^4w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = \frac{p}{D}} \tag{2.26}$$

Đây là phương trình vi phân chủ đạo của vỏ trụ tròn thẳng đứng chịu tải trọng đối xứng trục.

Từ nó, sau khi tìm được w ta tìm được các nội lực thành phần như sau:

Lực kéo vòng: $N = \dfrac{Eh}{R} w$

Momen uốn: $M = \dfrac{d^2 w}{dx^2}$

Lực cắt: $Q = D\dfrac{d^3 w}{dx^3}$

2.3.2. Tìm nghiệm tổng quát:

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 4 không thuần nhất (2.26):

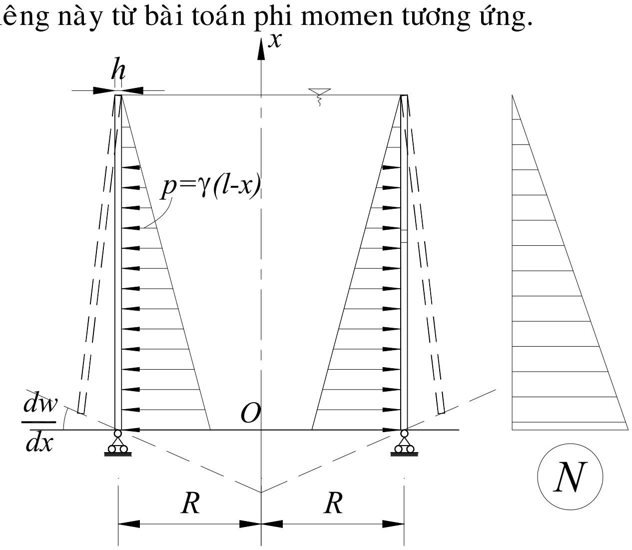
$$w = w_0 + \overline{w}$$

trong đó, w_0 là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

$\overline{w}$ là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho.

• ***<u>Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất</u>*** $\left(\overline{w}\right)$ (2.26) phụ thuộc tải trọng ngoài *p* và thường người ta lấy 1 nghiệm riêng này từ bài toán phi momen tương ứng.

Trường hợp vỏ chịu áp lực thủy tĩnh (hình vẽ): Dễ thấy rằng lực vòng của vỏ màng tương ứng là: $N = Rp = R\gamma\left(L - x\right)$



Vậy chuyển vị theo phương bán kính là:

$$\overline{w} = \varepsilon_\varphi R = \frac{NR}{Eh} = \frac{R^2\gamma}{Eh}\left(L - x\right)$$

Rõ ràng: $\overline{w} = \dfrac{R^2\gamma}{Eh}\left(L - x\right)$ (2.27)

Làm (2.26) trở thành đồng nhất và là 1 nghiệm tiêng của phương trình không thuần nhất (2.26).

• ***<u>Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất</u>*** $\left(w_0\right)$***:***

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = 0 \qquad (2.28)$$

Có dạng: $w_0 = e^{\lambda x}\left(C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x\right) + e^{-\lambda x}\left(C_3\cos\lambda x + C_4\sin\lambda x\right)$ (2.29)

trong đó: C_1, C_2, C_3, C_4 là các hằng số tích phân được xác định dựa vào các điều kiện biên.

Chú ý rằng: Vì $e^{\lambda x} \to \infty$ khi $x \to \infty$, mà $w = w_0 + \overline{w}$ là hữu hạn nên ta phải có $C_1 = C_2 = 0$.

Tuy nhiên, trong thực tiễn tải trọng, khi $\lambda L \geq 6$ thì người ta đã lấy $C_1 = C_2 = 0$. Khi đó, vỏ được xem là vỏ cao và lúc này:

$$w = \overline{w} + e^{-\lambda x}\left(C_3\cos\lambda x + C_4\sin\lambda x\right)$$

Còn khi vỏ thấp $\left(\lambda L < 6\right)$ thì người ta vẫn kể tới 4 hằng số tích phân này, tức:

$$w = \overline{w} + e^{\lambda x}\left(C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x\right) + e^{-\lambda x}\left(C_3\cos\lambda x + C_4\sin\lambda x\right) \qquad (2.30)$$

• ***Vỏ trụ cao*** $(\lambda L \geq 6)$ ***ngàm biên dưới:***

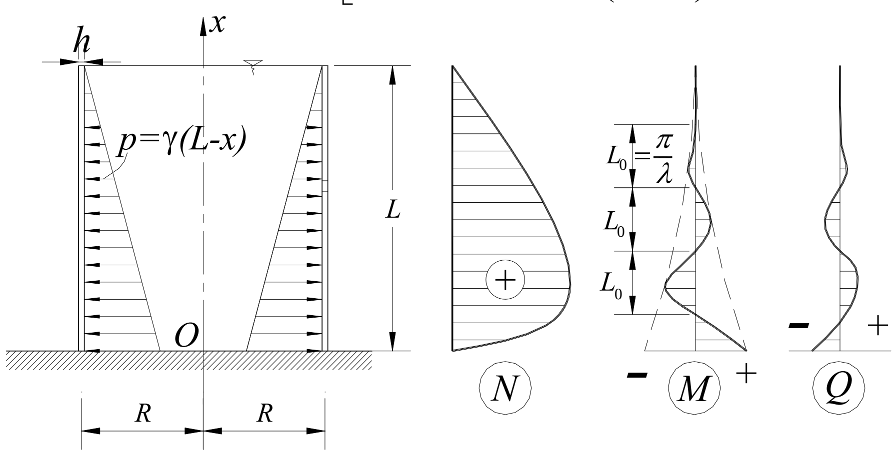
$$w = \overline{w} + w_0 = \frac{R^2\gamma}{Eh}(L-x) + e^{-\lambda x}\left(C_3\cos\lambda x + C_4\sin\lambda x\right) \tag{2.31}$$

Sử dụng các điều kiện biên: tại $x=0$: $\begin{cases}\text{chuyển vị: } w=0\\ \text{góc xoay: } \dfrac{dw}{dx}=0\end{cases}$, ta có:

$$\begin{cases} w\big|_{x=0} = \dfrac{R^2}{Eh}\gamma L + C_3 = 0 \\ \dfrac{dw}{dx}\Big|_{x=0} = -\dfrac{R^2}{Eh}\gamma - \lambda\left(C_3 - C_4\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -\dfrac{R^2}{Eh}\gamma L \\ C_4 = \dfrac{R^2}{Eh}\dfrac{\gamma}{\lambda} + C_3 = -\dfrac{R^2\gamma L}{Eh}\left(1-\dfrac{1}{\lambda L}\right) \end{cases}$$

Các thành phần nội lực sẽ là:

$$\begin{cases} N = \dfrac{Eh}{R}w = \gamma R\left\{\left(L-x\right) - Le^{-\lambda x}\left[\cos\lambda x + \left(1-\dfrac{1}{\lambda L}\right)\sin\lambda x\right]\right\} \\ M = D\dfrac{d^2w}{dx^2} = D2\lambda^2 e^{-\lambda x}[C_3\cos\lambda x - C_4\sin\lambda x] \\ \qquad = 2R^2\lambda^2\gamma L\dfrac{D}{Eh}e^{-\lambda x}\left[\left(1-\dfrac{1}{\lambda L}\right)\cos\lambda x - \sin\lambda x\right] \\ Q = D\dfrac{d^3w}{dx^3} = 2R^2\lambda^3\gamma L\dfrac{D}{Eh}e^{-\lambda x}\left[-\left(\cos\lambda x - \sin\lambda x\right) - \left(1-\dfrac{1}{\lambda L}\right)\left(\cos\lambda x - \sin\lambda x\right)\right] \end{cases} \tag{2.32}$$



• ***Vỏ trụ thấp*** $(\lambda L < 6)$ ***ngàm biên dưới:***

$$w = \overline{w} + w_0 = \frac{R^2\gamma}{Eh}(L-x) + e^{\lambda x}\left(C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x\right) + e^{-\lambda x}\left(C_3\cos\lambda x + C_4\sin\lambda x\right)$$

Sử dụng các điều kiện biên để xác định các hằng số tích phân C_1, C_2, C_3, C_4.

+ Tại biên dưới $(x=0)$: $\begin{cases}\text{chuyển vị: } w=0\\ \text{góc xoay: } \dfrac{dw}{dx}=0\end{cases}$

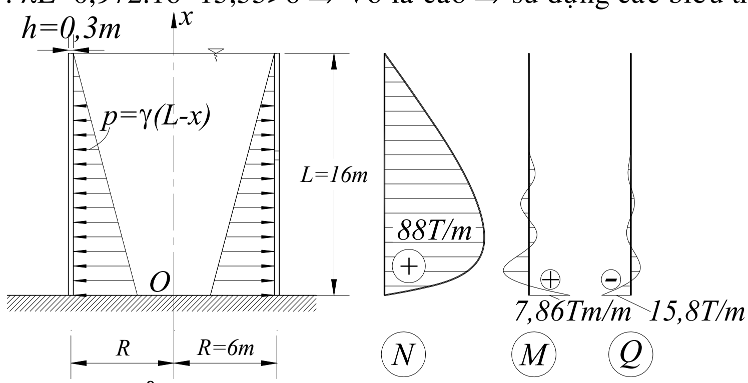
+ Biên tự do: $(x=L)$: $\begin{cases} M = D\dfrac{d^2w}{dx^2}=0 \\ Q = D\dfrac{d^3w}{dx^3}=0\end{cases}$

• ***Ví dụ:***

+ Vỏ trụ chứa nước có R=6m, cao L=16m, dày h=30cm, vật liệu bê tông có $\nu=1/6$, trọng lượng riêng của nước $\gamma=1T/m^3$.

Giải: Tính: $\lambda = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3(1-\nu)}}{Rh}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3\left(1-\dfrac{1}{6}\right)}}{6.0,3}} = 0,972$

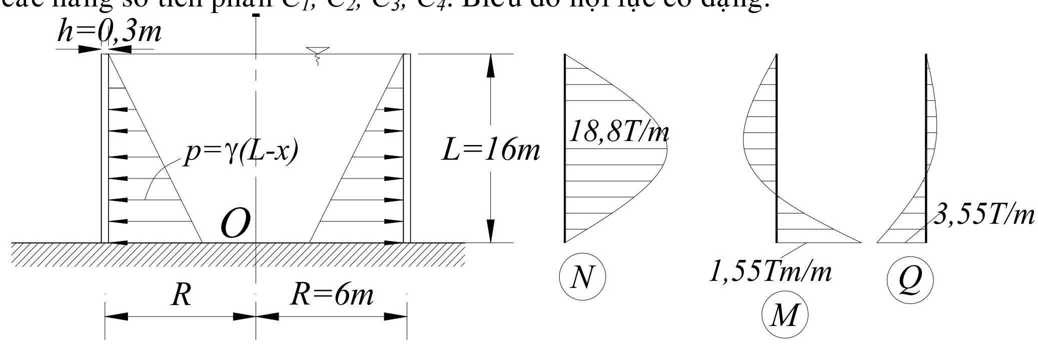
Vậy: $\lambda L=0,972.16=15,55>6 \Rightarrow$ Vỏ là cao $\Rightarrow$ sử dụng các biểu thức nội lực (2.32)



VỎ CAO

+ Trường hợp vỏ chỉ có chiều cao L=4m

Vậy: $\lambda L=0,972.4=3,89>6 \Rightarrow$ Vỏ là thấp. Từ các điều kiện biên ta xác định được các hằng số tích phân C_1, C_2, C_3, C_4. Biểu đồ nội lực có dạng:



VỎ THẤP